Poisson-Gleichung

$$\boxed{-\Delta u = f}$$

in der Physik z.B.:

1) Elektrostatik

Gaußsches Gesetz: $\quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

$\vec{E}(\vec{r})$ = elektr. Feld

$\rho(\vec{r})$ = Ladungsdichte

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,As/Vm$

$\rightsquigarrow$ elektrisches Potenzial Φ ($\rightsquigarrow \vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$)

genügt

$$\rho/\varepsilon_0 = \operatorname{div}\vec{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = -\Delta\Phi,$$

d.h. $\quad \boxed{-\Delta\Phi = \rho/\varepsilon_0}$

2) Newtonsche Gravitation:

Gaußsches Gesetz: $\quad \operatorname{div} \vec{g} = -4\pi\gamma\varrho$

$\vec{g}(\vec{r})$: Gravitationsfeld

γ : Newt. Grav. konst.

ϱ : Massendichte

$\rightarrow$ Gravitationspotential Φ_g $\left(\rightsquigarrow \vec{g} = -\operatorname{grad} \Phi\right)$

genügt

$$-4\pi\gamma\varrho = \operatorname{div} \vec{g} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi_g = -\Delta \Phi_g$$

d.h.

$$\boxed{-\Delta \Phi_g = -4\pi\gamma\varrho}$$

3) Stationäre Wärmeleitung:

$\eta(\vec{r})$: externe Heizleistungsdichte

$$\varrho c \cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} + \operatorname{div} \vec{q} = \eta$$

$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$: Wärmestromdichte

λ : Wärmeleitfähigkeit

ϱ : konst. Massendichte

c : spezifische Wärmekapazität

$\rightarrow$

$$\boxed{-\Delta T = \eta/\lambda}$$

wir suchen Lösungen der Poisson-Gleichung

$$\boxed{-\Delta u = f}$$

für allg. Inhomogenität $f(\vec{r})$ unter Randbedingung

$$\boxed{u(\vec{r}) \to 0 \quad \text{für} \quad |\vec{r}| \to \infty}$$

("Randwertproblem")

Lösung des Problems mittels geeigneter Green-Funktion:

Translationsinvariant $\rightsquigarrow$ $G_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = G(\vec{r} - \vec{r}_0)$;

$G(\vec{r})$ def. durch
$$\boxed{\begin{array}{ll} (i) & -\Delta G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \\ & \\ (ii) & \lim\limits_{|r| \to \infty} G(\vec{r}) = 0 \end{array}}$$

$$\ulcorner \to \quad u(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}_0 \; f(\vec{r}_0)\, G(\vec{r} - \vec{r}_0) \;\equiv\; (f * G)(\vec{r}) \quad \lrcorner$$

$$\boxed{\begin{aligned} &(i) \quad -\Delta G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \\ &(ii) \quad \lim_{|r|\to\infty} G(\vec{r}) = 0 \end{aligned}}$$

<u>Bestimmung der Green-Fkt $G(r)$</u> :

a) vergleiche (i) mit Poisson-Gl. der Elektrostatik:

$$\boxed{-\Delta \Phi = \rho/\varepsilon_0}$$

$\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$

$\rightarrow$ $\boxed{G(\vec{r}) \text{ ist Potenzial einer Einheitspkt.-ladung in } 0 \,!}$

$(\varepsilon_0 \equiv 1)$

d.h. $$\boxed{G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|}}$$

erfüllt Randbedingung : $\lim_{|\vec{r}|\to\infty} G(\vec{r}) = 0$ ✓

alternativ:

b) Bestimmung der Green-Fkt. mittels Fouriertransformation:

$$-\Delta\, G(\vec r) = \delta(\vec r)$$

$$\text{F.T.}\downarrow \qquad\qquad \downarrow \text{F.T}$$

$$k^2\, \hat G(\vec k) = 1 \qquad\qquad (\, k = |\vec k|\,)$$

d.h. $\hat G(\vec k) = \dfrac{1}{k^2}$

$(\text{F.T.})^{-1}$

$$\rightarrow \quad G(\vec r) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\langle \vec k, \vec r\rangle}}{k^2} \underset{\vec k = \frac{\vec q}{r}}{=} \frac{1}{\cancel{r^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec q}{(2\pi)^3} \frac{\cancel{r^2}}{q^2}\, e^{i\langle \vec q, \hat r\rangle}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\langle \vec q, \hat r\rangle}}{q^2}}_{\text{unabhängig von } \hat r\,!} \equiv \frac{\alpha}{r} \qquad (\, r = |\vec r|\,)$$

Bestimmung der Konstanten α mittels S. v. Gauß:

$$-\Delta \frac{\alpha}{r} \overset{!}{=} \delta(\vec{r})$$

$$\rightarrow \quad 1 = \int_{K_R} \delta(\vec{r})\, d^3\vec{r} = -\int_{K_R} \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{\alpha}{r}\, d^3\vec{r} \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{\partial K_R} \operatorname{grad} \frac{\alpha}{r}\, d\vec{f}$$

$$= \int_{\partial K_R} \frac{\alpha}{r^2}\, \hat{r}\, d\vec{f} = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{R^2} = 4\pi\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4\pi}$$

d.h. $\qquad G(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi |\vec{r}|}$ ✓

$$\rightarrow \quad u(\vec{r}) = f * G(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}_0\, f(\vec{r}_0)\, G(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}_0\, \frac{f(\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

Zusammenfassung:

- $G(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi|\vec{r}|}$ ist <u>Green-Fkt.</u> der Poisson-Gl.

  mit Randbedingung $\lim\limits_{|\vec{r}|\to\infty} G(\vec{r}) = 0$

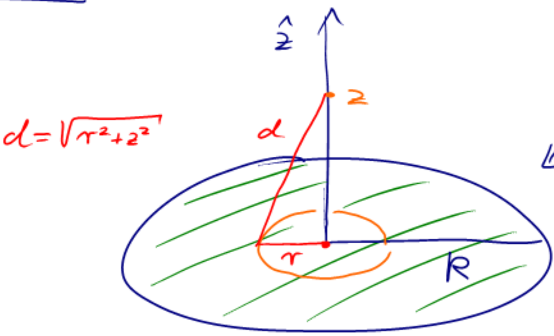
- $u(\vec{r}) = f * G(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}_0 \, \dfrac{f(\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

  ist Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f$$

  mit Randbedingung $\lim\limits_{|\vec{r}|\to\infty} u(\vec{r}) = 0$

Beispiel:



homogen geladene Kreisscheibe, Radius R, Flächenladungsdichte $\underline{\underline{\sigma}}$

$$\boxed{\vec{E}\text{-Feld auf } \hat{z}\text{-Achse?}}$$

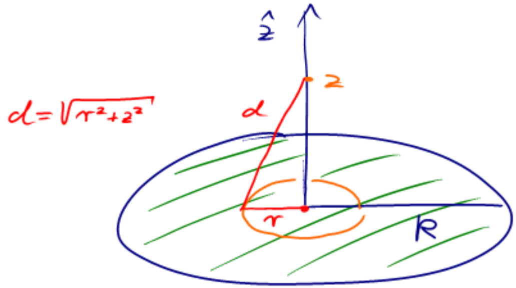
aufgrund Symmetrie $\vec{E}(0,0,z) \equiv E_z(z)\,\hat{z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}(0,0,z)\,\hat{z}$,

wobei Φ bestimmt durch

$$-\Delta\,\Phi(\vec{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}(\vec{r}) = \begin{cases} \sigma\,\delta(z) & : x^2+y^2 < R^2 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$\longrightarrow$

Rechnung:



$$\Phi(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}_0 \, \frac{\rho(\vec{r}_0)}{\left|\vec{r}_0 - \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R dr \, \frac{2\pi r}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sqrt{r^2+z^2}\,\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{E_z(z) = -\frac{\partial \Phi(0,0,z)}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}} + \operatorname{sgn} z\right)}$$

<u>für $R \to \infty$:</u> $\quad E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \operatorname{sgn} z \quad$ ✓ $\quad$ (Exp. II)

<u>für $R \ll z$:</u> $\quad \operatorname{sgn} z = 1 \quad$ und $\quad \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(R/z)^2}} \approx 1 - \frac{R^2}{2z^2}$

$$\rightarrow \quad E_z(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\pi R^2}{z^2} = \frac{Q_R}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^2} \quad ✓ \qquad \left(Q_R = \pi R^2 \cdot \sigma\right)$$