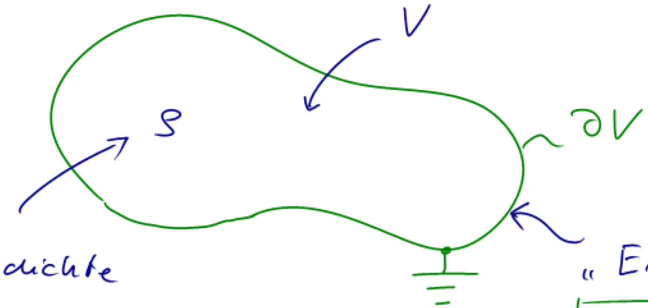
Poisson-Gleichung auf Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$ und Randbed. $u|_{\partial V} = 0$

Motivation:



Ladungsdichte verursacht elektrisches Potential Φ in V gemäß

$$\boxed{-\Delta \Phi = \rho / \varepsilon_0}$$

„Erdung" sorgt für

$$\boxed{\Phi = 0 \text{ auf Rand } \partial V}$$

Wie bestimmen wir Φ ?

Randwertproblem

Für Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$ und Inhomogenität $f: V \to \mathbb{R}$ bestimme Lösung $u: V \to \mathbb{R}$ der Poisson-GL.

$$-\Delta u = f$$

mit Randbedingung $u|\partial V = 0$.

Lösung wieder mittels Green-Fkt, hier definiert durch

(i) $-\Delta G_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ für $\vec{r}, \vec{r}_0 \in V$

(ii) $G_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r}_0 \in V$, $\vec{r} \in \partial V$

$\longrightarrow$ $u(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}_0 \, f(\vec{r}_0) \, G_{\vec{r}_0}(\vec{r})$ ist Lösung mit $u|\partial V = 0$!

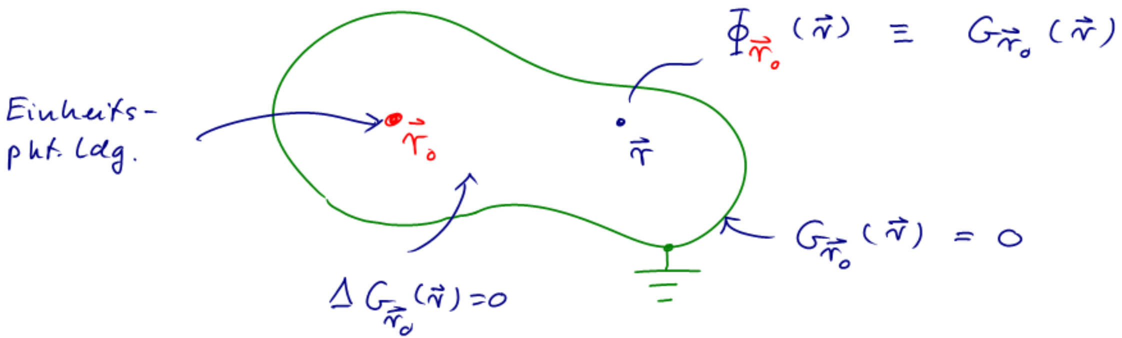
$$\boxed{\text{(i)}\quad -\Delta G_{\vec r_0}(\vec r) = \delta(\vec r - \vec r_0)}$$

- u Lösung von $-\Delta u = f$:

$$-\Delta \int d^3\vec r_0 \, f(r_0)\, G_{r_0}(\vec r) = -\int d^3\vec r_0\, f(r_0)\, \Delta G_{r_0}(r) = f(r)$$

- $u|\partial V = 0$: $\quad \vec r \in \partial V \overset{(ii)}{\rightsquigarrow} G_{r_0}(\vec r) = 0 \rightsquigarrow \int d^3 r_0\, f(\vec r_0)\, G_{r_0}(\vec r) = 0$

verbleibendes Problem: Bestimmung von $G_{\vec r_0}(\vec r)$!



für hinreichend einfaches Gebiet V:

Bildladungsmethode:

Für Einheitspunktladung $q=1$ bei $\vec{r}_0$ innerhalb von V positioniere geeignete Bildladungen $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots q^{(n)}$ an geeigneten Orten $r_0^{(1)}, r_0^{(2)}, \dots, r_0^{(n)}$ außerhalb von V derart, dass für alle $\vec{r} \in \partial V$

$$\Phi_{ges}(\vec{r}) = \Phi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) + \sum_{\ell=1}^{n} \Phi^{(\ell)}_{\vec{r}_0^{(\ell)}}(\vec{r}) \overset{!}{=} 0$$

beachte: für $\vec{r} \in V$:

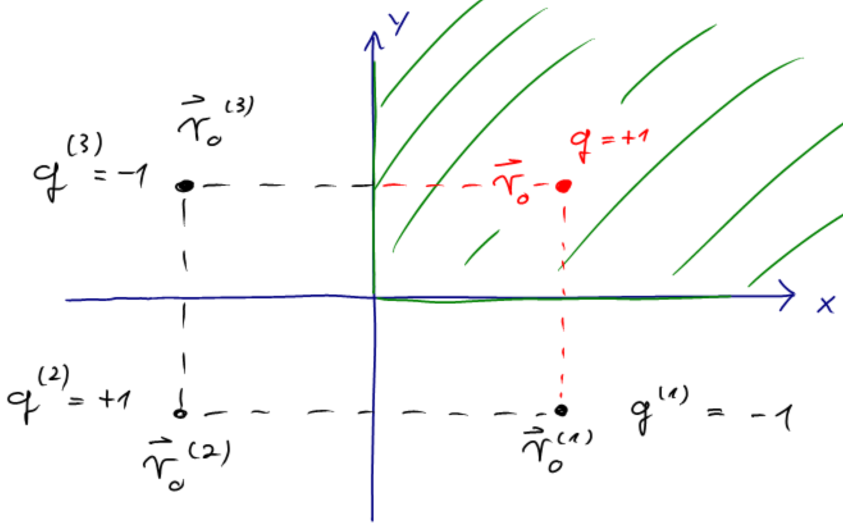
$$-\Delta \Phi_{ges}(\vec{r}) = -\Delta \Phi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) + \sum_{\ell=1}^{n} \Delta \Phi_{\vec{r}_0^{(\ell)}}(\vec{r})$$

$$= \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) + \underbrace{\sum_{\ell} q_\ell \, \delta(\vec{r}-\vec{r}_0^{(\ell)})}_{=0} \quad !$$

$\rightsquigarrow$ d.h. $\Phi_{ges}(\vec{r})$ ist die gesuchte Green-Fkt $G_{\vec{r}_0}(\vec{r})$!

Beispiel: $V = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge y > 0 \}$

"Viertelraum"



$$\rightsquigarrow \quad G_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0^{\,(1)}|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0^{\,(2)}|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0^{\,(3)}|} \right)$$