Wellengleichung

$$\boxed{\Box u = f}$$

mit D'Alembert-Operator

$$\boxed{\Box := \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}}$$

(i.d.R. $d = 3$)

c = Wellengeschwindigkeit

- Inhomogenität und Lösung sind zeitabhängige Skalar-Felder:

$$f(t, \vec{r}) \longrightarrow u(t, \vec{r})$$

Wellengleichungen in der Physik: z. B.

1) Akustik: Schallwellen in Festkörper / Fluid / Gas:

$$\Box p = q$$

$p(t, \vec{r})$: Schalldruck

$q(t, \vec{r})$: "Schallquellenstärke": $q = \operatorname{div} \vec{f}$

Kraftdichte

$$c = \sqrt{\frac{dp_0}{d\varrho_0}}$$: Schallgeschwindigkeit

2) <u>Elektrodynamik</u>: el.-mag. Wellen

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\,\phi &= \varrho/\varepsilon_0 \\ \Box\,\vec{A} &= \mu_0\,\vec{j} \end{aligned}}$$

(komponentenweise)

$\phi(t,\vec{r})$: elektrodynamisches <u>Skalarpotenzial</u>

$\vec{A}(t,\vec{r})$: elektrodynamisches <u>Vektorpotenzial</u>

$$\left.\begin{aligned} &\varrho(t,\vec{r}) : \text{Ladungsdichte} \\ &\vec{j}(t,\vec{r}) : \text{Stromdichte} \end{aligned}\right\} \text{ Quellen el.-mag. Wellen}$$

$$\left(\longrightarrow \quad \begin{aligned} \vec{E} &= -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \\ \vec{B} &= \operatorname{rot}\vec{A} \end{aligned} \right)$$

c : <u>Lichtgeschwindigkeit</u> (im Vakuum $c = 3{,}00\ldots 10^8 \frac{m}{s}$)

physikalisch motiviertes Randwertproblem:

Für Inhomogenität f derart, dass

(a) $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t, \vec{r}) = 0$ für alle $\vec{r}$,

(b) $\lim\limits_{|\vec{r}| \to \infty} f(t, \vec{r}) = 0$ für alle t,

bestimme Lösung $u(t, \vec{r})$ von $\Box u = f$ mit

(a) $\lim\limits_{t \to -\infty} u(t, \vec{r}) = 0$ für alle $\vec{r}$,

(b) $\lim\limits_{|\vec{r}| \to \infty} u(t, \vec{r}) = 0$ für alle t,

$\rightarrow$ Lösung mittels Green-Funktion $G(t, \vec{r})$ bestimmt durch:

(i) $\quad \Box\, G(t,\vec{r}) = \delta(t)\,\delta(\vec{r})$

(ii) $\quad \lim_{t \to -\infty} G(t,\vec{r}) = 0$

$\lim_{|\vec{r}| \to \infty} G(t,\vec{r}) = 0$

$\Rightarrow$ Lösung $\quad u(t,\vec{r}) = f * G(t,\vec{r})$

$$= \int_{\mathbb{R}} dt_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}_0 \; f(t_0,\vec{r}_0)\, G(t-t_0,\vec{r}-\vec{r}_0)$$

Bestimmung von $G(t,\vec{r})$ mittels Fouriertransformation

im $\underset{\text{Zeit}}{\underset{\uparrow}{1}} + \underset{\text{Raum}}{\underset{\uparrow}{3}}$ Dimensionen:

Konvention

$$\boxed{f(t,\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \hat{f}(\omega,\vec{k})\, e^{i\langle \vec{k},\vec{r}\rangle - i\omega t}}$$

mit

$$\boxed{\hat{f}(\omega,\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}\; f(t,\vec{r})\, e^{-i\langle \vec{k},\vec{r}\rangle + i\omega t}}$$

es gilt:

- $\widehat{\delta(t)\,\delta(\vec{r})}(\omega,\vec{k}) = \underline{1}$
- $\widehat{\frac{\partial f}{\partial t}}(\omega,\vec{k}) = \underline{-i\omega}\,\hat{f}(\omega,\vec{k}) \quad \rightarrow \quad \widehat{\frac{\partial^2 f}{c^2\partial t^2}} = -\frac{\omega^2}{c^2}\hat{f}$
- $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_\ell}}(\omega,\vec{k}) = \underline{ik_\ell}\,\hat{f}(\omega,\vec{k}) \quad \rightarrow \quad \widehat{\Delta f} = -k^2\hat{f}$

$(k = |\vec{k}|)$

$$\rightsquigarrow \quad \Box\, G(t,\vec{r}) = \delta(t)\,\delta(\vec{r})$$

$$\downarrow \text{F.T.} \qquad\qquad \downarrow \text{F.T}$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{G}(\omega,\vec{k}) = 1$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\hat{G}(\omega,\vec{k}) = \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2}}$$

$\Rightarrow$ $G(t,\vec{r})$ per inversen F.T.:

$$G(t,\vec{r}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{\left(\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\langle \vec{k},\vec{r}\rangle}}{k^2 - \omega^2/c^2} \right)}_{=:\ \tilde{G}(\omega,\vec{r})} e^{-i\omega t}$$

$d^3\vec{k}$ – Integration mittels Kugelkoordinaten, $\vec{e}_3 \parallel \vec{r}$:

$k = |\vec{k}|$

$r = |\vec{r}|$

$$G(\omega, \vec{r}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\langle \vec{k}, \vec{r}\rangle}}{k^2 - \omega^2/c^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \, \frac{k^2}{k^2 - \omega^2/c^2} \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \, \sin\vartheta \, e^{ikr\cos\vartheta}}_{\displaystyle = i \left. \frac{e^{ikr\cos\vartheta}}{kr} \right|_0^\pi = \frac{i}{kr}\left(e^{-ikr} - e^{+ikr}\right)}$$

$$= \frac{i}{4\pi^2 r} \int_{\underline{\underline{0}}}^\infty dk \, \frac{k\cancel{^2}}{k^2 - \omega^2/c^2} \left(\underline{\underline{e}}^{-ikr} - \underline{\underline{e}}^{+ikr} \right)$$

$$\overset{!}{=} \frac{i}{4\pi^2 r} \int_{\underline{\underline{-\infty}}}^\infty dk \, \frac{k \, e^{-ikr}}{k^2 - \omega^2/c^2}$$

mit $\displaystyle \frac{k}{k^2 - \omega^2/c^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k \underline{\underline{-}} \omega/c} + \frac{1}{k \underline{\underline{+}} \omega/c} \right)$ erhalten wir :

$$\tilde{G}(\omega,\vec{r}) = \frac{i}{8\pi^2 r}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikr}}{k - \omega/c}\, dk}_{= e^{-i\omega r/c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikr}}{k}\,dk} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikr}}{k + \omega/c}\, dk}_{= e^{+i\omega r/c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikr}}{k}\,dk} \right)$$

mit $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr}}{k}\,dk \overset{k=\frac{x}{r}}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{x}\,dx}_{\text{unabhängig von } r!} = -i\pi$ also

nächste Woche!

$$\boxed{\tilde{G}(\omega,\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-i\omega r/c}}{4\pi r} + \frac{e^{+i\omega r/c}}{4\pi r} \right)}$$

$$G(t, \vec{r}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \, \tilde{G}(\omega, \vec{r}) \, e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi r} \Bigg(\underbrace{\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t + r/c)}}_{= \, \delta(t + r/c)} + \underbrace{\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t - r/c)}}_{= \, \delta(t - r/c)} \Bigg)$$

Zwischenergebnis:

$$\boxed{G(t, \vec{r}) = \frac{1}{2} \Bigg(\underbrace{\frac{\delta(t + r/c)}{4\pi r}}_{=: \, G_a(t, \vec{r})} + \underbrace{\frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r}}_{=: \, G_r(t, \vec{r})} \Bigg)}$$

avancierte Green-Funktion

retardierte Green-Funktion