Avancierte und retardierte Green-Funktion

(der Wellengleichung $\Box u = f$)

bisher:

$$\boxed{\Box\, G(t,\vec{r}) = \delta(t)\,\delta(\vec{r})}$$

$\downarrow$ F.T. $\qquad$ $\downarrow$ F.T. $\qquad$ ($k = |\vec{k}|$)

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{G}(\omega,\vec{k}) = 1 \longrightarrow \boxed{\hat{G}(\omega,\vec{k}) = \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}$$

$\downarrow$ $(\text{F.T.})^{-1}$

$$\boxed{G(t,\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\delta(t + r/c)}{4\pi r}}_{=:\, G_a(t,\vec{r})} + \underbrace{\frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r}}_{=:\, G_r(t,\vec{r})} \right)}$$

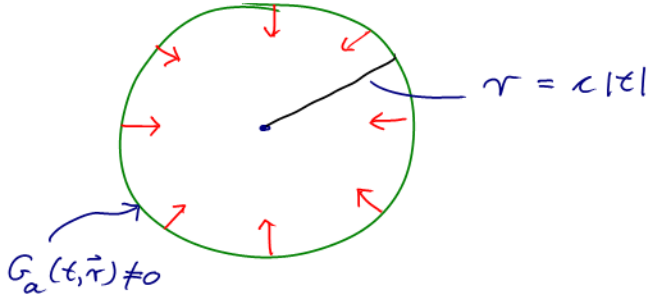
<u>avancierte</u> Green-Funktion $\qquad$ <u>retardierte</u> Green-Funktion

avancierte Green-Fkt.

$$\boxed{G_a(t,\vec{r}) = \frac{\delta(t + |\vec{r}|/c)}{4\pi\,|\vec{r}|}}$$

verschwindet für $t > 0$!

für $t < 0$:



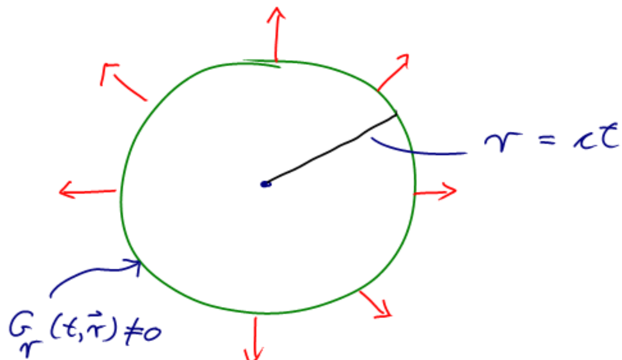
einlaufende Kugelwelle!

retardierte Green-Fkt.:

$$\boxed{G_r(t,\vec{r}) = \frac{\delta(t - |\vec{r}|/c)}{4\pi\,|\vec{r}|}}$$

verschwindet für $t < 0$!

für $t > 0$:



auslaufende Kugelwelle!

$$G_{a/r}(t,\vec{r}) = \frac{\delta(t \pm |\vec{r}|/c)}{4\pi|\vec{r}|}$$ erfüllen jeweils

- $\Box\, G = \delta(t)\,\delta(\vec{r})$

- $\lim\limits_{|\vec{r}|\to\infty} G(t,\vec{r}) = 0$ für alle t

aber nur retardierte Green-Fkt $G_r(t,\vec{r})$ erfüllt auch

- $\lim\limits_{t\to -\infty} G(t,\vec{r}) = 0$!

$\longrightarrow$ retardierte Green-Fkt $G_r(t,\vec{r})$ ergibt Lösungen $u(t,\vec{r})$ der Wellengl. $\Box\, u = f$ zur Randbedingung

(a) $\lim\limits_{t\to -\infty} u(t,\vec{r}) = 0$!

(b) $\lim\limits_{|\vec{r}|\to\infty} u(t,\vec{r}) = 0$

$\longrightarrow$ zu gegebener Inhomogenität $f(t,\vec{r})$ (insb. $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t,\vec{r})=0$)

ist

$$u(t,\vec{r}) = (f * G_r)(t,\vec{r})$$

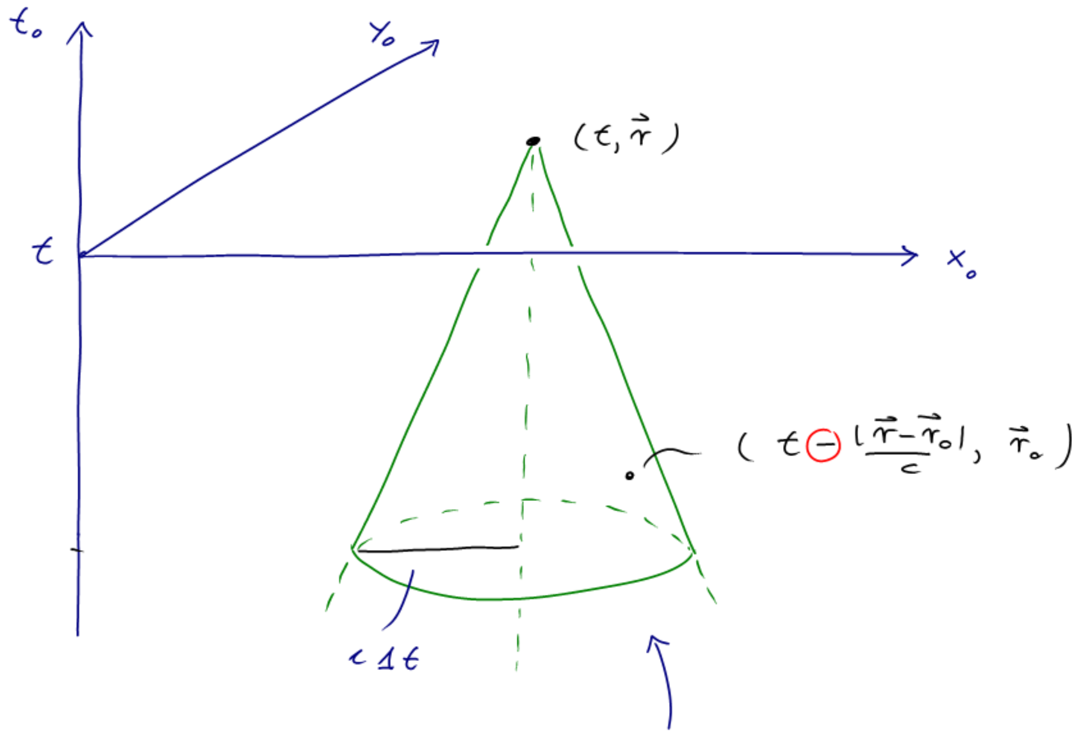
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}_0 \; f(t_0,\vec{r}_0)\, G_r(t-t_0, \vec{r}-\vec{r}_0)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}_0 \; f(t_0,\vec{r}_0)\, \underbrace{\delta\left(t-t_0-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{c}\right)}_{\Rightarrow\; t_0 \overset{!}{=} t-|\vec{r}-\vec{r}_0|/c} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

d.h.

$$\boxed{u_r(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}_0 \; \frac{f\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}}$$

„retardierte Lösung“; $t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{c}$: „retardierte Zeit“



„ Ereignisse auf dem Vergangenheitslichtkegel bestimmen die Gegenwart ! "

$f\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0\right)$

$u(t, \vec{r})$

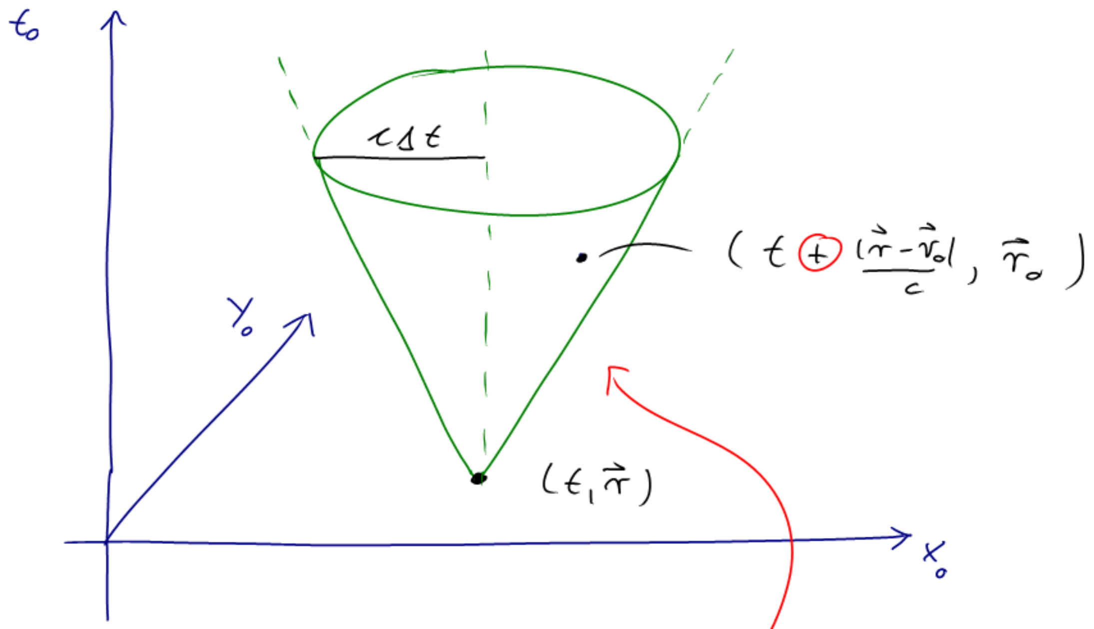
<u>avancierte</u> Green-Fkt. $G_{a}(t,\vec{r}) = \delta(t + \frac{|\vec{r}|}{c}) \frac{1}{4\pi|\vec{r}|}$ führt auf <u>avancierte</u> Lösung:

$$u_{a}(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}_0 \; \frac{f(t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{c}, \vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

löst ebenfalls Wellengl. $\Box u = f$, aber zur Randbed.

$$\lim_{t\to +\infty} u(t,\vec{r}) = 0 \quad !$$

(solange $\lim_{t\to+\infty} f(t,\vec{r}) = 0$)



„Ereignisse auf dem Zukunftslichtkegel bestimmen die Gegenwart" ???

$\downarrow$

$f\left(t + \frac{|\vec r - \vec r_0|}{c}, \vec r_0\right)$

$\downarrow$

$u(t, r)$

avancierte Lösungen widersprechen der Erfahrung !

→ in der Physik werden i.d.R. retardierte Lösungen betrachtet !

Bemerkung:

Asymmetrie der Zeitrichtung (Vergangenheit $\rightarrow$ Zukunft)
$\cancel{\leftarrow}$

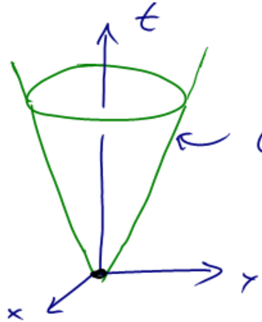
aufgrund Wahl der Randbedingung:

- $\lim\limits_{t \to -\infty} u(t, \vec{r}) \overset{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad$ retardierte Lösungen

- $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t, \vec{r}) \overset{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad$ avancierte Lösungen

Wellengleichung (ohne Randbedingungen) ist symmetrisch bzgl. Zeitumkehr ! (vgl. Übungen) retardierte / avancierte Lösungen für singuläre Inhomogenität ("Quelle") $f(t,\vec{r}) = \delta(t)\,\delta(\vec{r})$:

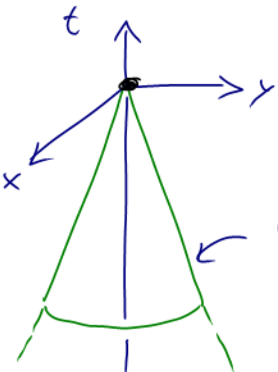
<u>retardierte</u> Lösung: $u_r(t,\vec{r}) = G_r(t,\vec{r}) = \delta\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) \frac{1}{4\pi|\vec{r}|}$



$G_r(t,\vec{r}) \neq 0$

<u>aus</u>laufende Kugelwelle

<u>avancierte</u> Lösung: $u_a(t,\vec{r}) = G_a(t,\vec{r}) = \delta\left(t + \frac{|\vec{r}|}{c}\right) \frac{1}{4\pi|\vec{r}|}$



$G_a(t,\vec{r}) \neq 0$

<u>ein</u>laufende Kugelwelle