Elemente der Funktionentheorie:

$\approx$ = „komplexe Analysis"

Komplexe Differenzierbarkeit und holomorphe Funktion

Erinnerung:

$f: \,]a, b[\, \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0

$:\Leftrightarrow$

es existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(f(x_0 + h) - f(x_0) \Big) =: f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0)$$

Γ $\rightsquigarrow$ lineare Näherung:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\, h$$

Def.: komplexe Differenzierbarkeit

$$f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)$$ komplex differenzierbar in $z_0 \in \mathcal{U} \subset \mathbb{C}$

$:\Leftrightarrow$

es existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{1}{h}\Big(f(z_0+h) - f(z_0) \Big) =: f'(z_0) \equiv \frac{df}{dz}(z_0)$$

$\rightsquigarrow$ lineare Näherung: $f(z_0+h) \approx f(z_0) + f'(z_0)\, h$

- $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph $:\Leftrightarrow$ $\forall z_0 \in \mathcal{U}$: f kompl. diffbar in z_0
- f' ist die Ableitung von f
- $f + c$ ist Stammfunktion zu f'
  (c konstant)

aufgrund analoger Definitionen von reeller und komplexer Differenzierbarkeit gelten gleiche

Ableitungsregeln:

$f, g : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{C}$, seien holomorphe Fkten, zudem $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und f umkehrbar; dann auch $f+g$, λf, fg, f/g, f^{-1}, $f \circ g$ (soweit definiert) holomorph und

- $(f+g)' = f' + g'$; $\quad (\lambda f)' = \lambda f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{1}{g^2}\left(f'g - fg'\right)$
- $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))\, g'(z)$
- $(f^{-1})'(z) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(z))}$

Beispiele holomorpher Funktionen

(i) $z^n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $(n \in \mathbb{N}_+)$

$$(z^n)'(z) = n z^{n-1}$$

(ii) $z^{-n} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $(n \in \mathbb{N}_+)$

$$(z^{-n})'(z) = -n z^{-n-1}$$

(iii) $P(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph

(iv) $Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m$ mit Nullstellen

$z_1, z_2, \ldots, z_k$

$$\longrightarrow \quad f := \frac{P}{Q} : \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C} \quad \text{holomorph}$$

(v) komplexe Fkt. f definiert durch Potenzreihe, d.h.

$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell z^\ell,$$ ist holomorph auf Konvergenzbereich von f; etwa:

- $\exp(z) \equiv e^z := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} z^\ell$ holomorph auf $\mathbb{C}$, $(e^z)' = e^z$

- $\sin(z) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} z^{2\ell+1}$ holomorph auf $\mathbb{C}$, $(\sin z)' = \cos z$

- $\cos(z) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} z^{2\ell}$ holomorph auf $\mathbb{C}$, $(\cos z)' = -\sin z$

Komplexe vs. reelle Differenzierbarkeit:

Cauchy - Riemannsche Differenzialgleichungen

$$f : U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)$$

1D komplex

$$z = x + iy \equiv \binom{x}{y} \quad \longleftrightarrow \quad f = u + iv \equiv \binom{u}{v}$$

$$\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^2, \quad U \subset \mathbb{R}^2, \quad \binom{x}{y} \mapsto \binom{u}{v}$$

2D reell

Erinnerung

$\tilde{f}$ reell diff'bar in $p = \binom{x_0}{y_0}$

$:\Longleftrightarrow$ es existiert $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ derart, dass

$$\lim_{\mathbb{R}^2 \ni h \to 0} \frac{1}{|h|} \left(\tilde{f}(p+h) - \tilde{f}(p) - A h \right) \overset{!}{=} 0$$

$A =: d\tilde{f}_p$: Differenzial von $\tilde{f}$ in p

$(d\tilde{f} \mathrel{\hat{=}} J\tilde{f})$

Lemma

f komplex diffbar in $z_0 = x_0 + iy_0$

$\Longleftrightarrow$

$\tilde{f}$ reell diffbar in $p = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und

$$d\tilde{f}_p = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{für geeig. } a, b \in \mathbb{R}$$

„$\Rightarrow$" $\quad f(z_0 + (h_1 + ih_2)) = f(z_0) + f'(z_0)(h_1 + ih_2) + o(h^2)$

$$= f(z_0) + \underbrace{(a + ib)(h_1 + ih_2)}_{\shortparallel} + o(h^2)$$

sei $f'(z_0) = a + ib$

$$(ah_1 - bh_2) + i(ah_2 + bh_1) \equiv \begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ ah_2 + bh_1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

d.h. $\tilde{f}$ reell diffbar und $d\tilde{f}_p = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ✓

„$\Leftarrow$":

$$d\tilde{f}_p \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \underset{\text{s.o.}}{=} (a+ib)(h_1+ih_2) \qquad (*)$$

dann $f(z_0 + \underbrace{(h_1+ih_2)}_{= h}) = f(z_0) + d\tilde{f}_p \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h^2)$

$$\overset{(*)}{=} f(z_0) + (a+ib)(h_1+ih_2) + o(h^2)$$

$$\rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(\underbrace{f(z_0+h) - f(z)}_{= (a+ib)h + o(h^2)} \Big) = a + ib \equiv f'(z_0) \quad \checkmark$$

mit $\quad \tilde{f} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad$ ist $\quad d\tilde{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$

und somit

$$\boxed{d\tilde{f} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} \boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} \overset{!}{=} \dfrac{\partial v}{\partial y}} \\ \boxed{\dfrac{\partial v}{\partial x} \overset{!}{=} -\dfrac{\partial u}{\partial y}} \end{array}}$$

Cauchy-Riemannsche DGLen für $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$

Satz

$f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ holomorph

$\Longleftrightarrow$

$\tilde{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^2$ reell diffbar und u, v genügen den Cauch-Riemannschen DGLen

Folgerungen:

(1) Real- und Imaginärteil einer holomorphen Fkt. $f = u + iv$ sind Lösungen der 2D Laplace-Gleichungen

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Delta v = 0$$

(d.h. u, v sind harmonische Fkten)

$\Big[$ denn $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\overset{\text{C.R.}}{=} \frac{\partial v}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{\overset{\text{C.R.}}{=} -\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(v - v) = 0$;

$\Delta v = 0$ analog; $\Big]$

Anwendung in 2D-Elektrostatik $\quad (\Delta \Phi = 0)$

(2)

$$d\tilde{f}_p = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a/\lambda & -b/\lambda \\ b/\lambda & a/\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\lambda = \sqrt{a^2+b^2}$

orthonormal

$\cot\alpha \overset{!}{=} a/b$

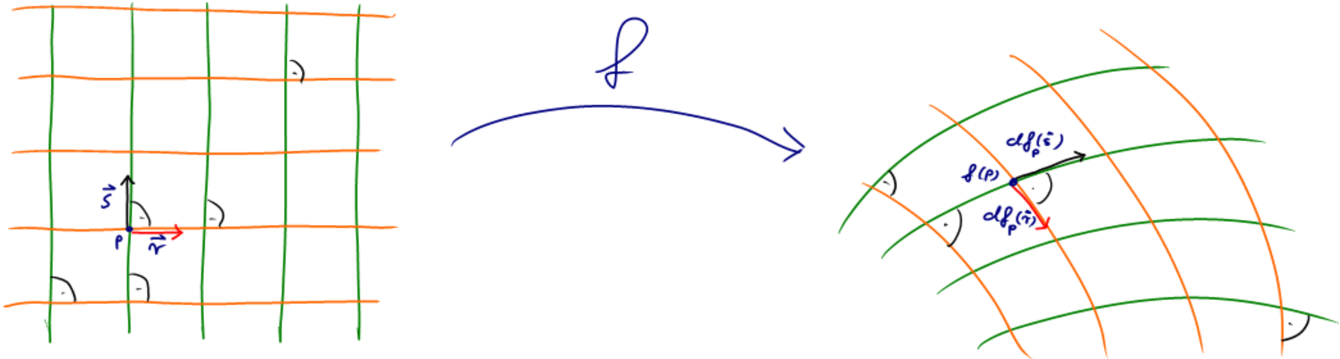
d.h. $d\tilde{f}_p = \lambda \cdot R_\alpha$ ist <u>winkeltreu</u>:

isotrope Dehnung/Stauchung

<u>Drehung</u>

$$\sphericalangle(\vec{r}, \vec{s}) \overset{!}{=} \sphericalangle(d\tilde{f}_p(\vec{r}), d\tilde{f}_p(\vec{s}))$$

Eine holomorphe Fkt f ist damit <u>lokal winkeltreu</u> und somit per def. eine <u>konforme</u> Abb.



f
p
$\vec{s}$
$\vec{r}$
$f(p)$
$df_p(\vec{s})$
$df_p(\vec{r})$