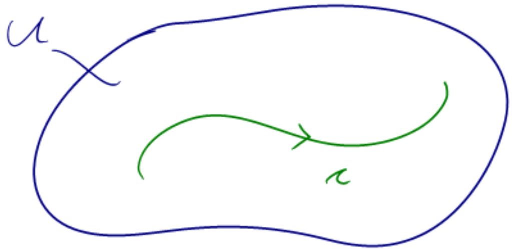
Komplexes Wegintegral

über Fkt $f : U \to \mathbb{C}$ längs Kurve $c : [t_0, t_1] \to U$



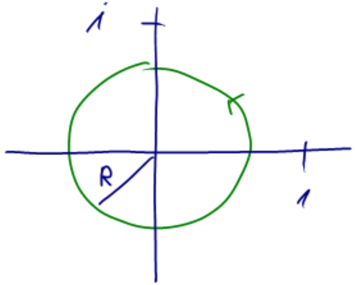
$$\boxed{\int_c f(z)\,dz := \int_{t_0}^{t_1} f(c(t))\, c'(t)\, dt}$$

$$\left(\equiv \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{Re}\big(f(c(t))c'(t)\big)dt + i\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{Im}\big(f(c(t))c'(t)\big)\,dt \right)$$

Beispiel:

$K_R(0) \equiv \gamma =$ Kreisweg, Radius R, Mittelpkt 0:

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \longmapsto Re^{it}$$



$$\longrightarrow \quad \gamma'(t) = iRe^{it} \equiv i\gamma(t)$$

$$\longrightarrow \bullet \quad \int_\gamma z \, dz = i \int_0^{2\pi} \gamma(t)^2 \, dt = i \int_0^{2\pi} R e^{2it} \, dt = 0$$

$$\bullet \quad \underline{\underline{\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz}} = i \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{\gamma(t)}}{\cancel{\gamma(t)}} \, dt = \underline{\underline{2\pi i}}$$

allgemein für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{c} z^n \, dz = i \int_0^{2\pi} c(t)^{n+1} \, dt$$

$$= i \, R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, dt = \begin{cases} 2\pi i & : n = -1 \\ 0 & : n \neq -1 \end{cases}$$

kurz:

$$\boxed{\int_{K_R(0)} z^n \, dz = \delta_{n,-1}}$$

Cauchyscher Integralsatz

$U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph,
$\gamma \subset U$ geschlossener Weg; dann

$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{!}{=} \underline{\underline{0}}$$

Statt eines elementaren Beweises führen wir hier diesen Satz auf uns bekannte Ergebnisse der mehrdimensionalen Analysis zurück:

- rotationsfreies Vf. auf einf. zusammenhäng. Gebiet ist konservativ
- Wegintegral über kons. Vf. längs geschl. Weg verschwindet.

dazu betrachten wir $\underline{\mathrm{Re}}/\underline{\mathrm{Im}} \int_c f(z)\,dz$ als reelle Wegintegrale:

$$f = u + iv \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ; \quad c(t) = x(t) + iy(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{c}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \int_c f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f(c(t))\,\dot{c}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\underline{(u\dot{x} - v\dot{y})} + i\underline{(v\dot{x} + u\dot{y})} \right] dt$$

$$u = u(c(t)), \quad v = v(c(t))$$

d.h.

$$\underline{\mathrm{Re}} \int_c f(z)\,dz = \int_c \vec{F}\,d\vec{l} \quad \text{mit} \quad \vec{F} = \underline{\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}} \equiv \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathrm{Im}} \int_c f(z)\,dz = \int_c \vec{G}\,d\vec{l} \quad \text{mit} \quad \vec{G} = \underline{\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}} \equiv \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$$

u und v als Real- und Imaginärteil der holomorphen Fkt. f erfüllen Cauchy-Riemannsche DGLen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad ,$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}$$

weshalb $\quad (\operatorname{rot} \vec{F})_z = -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\quad (\operatorname{rot} \vec{G})_z = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

also $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ und $\operatorname{rot} \vec{G} = 0$; da zudem U einf. zshgnd. und c geschlossen sind $\vec{F}$ und $\vec{G}$ konservativ und

$$\int_c \vec{F}\, d\vec{l} = 0 \quad \text{und} \quad \int_c \vec{G}\, d\vec{l} = 0 \quad ; \text{ d.h. } \int_c f(z)\, dz = 0 \, .$$

Anwendung:

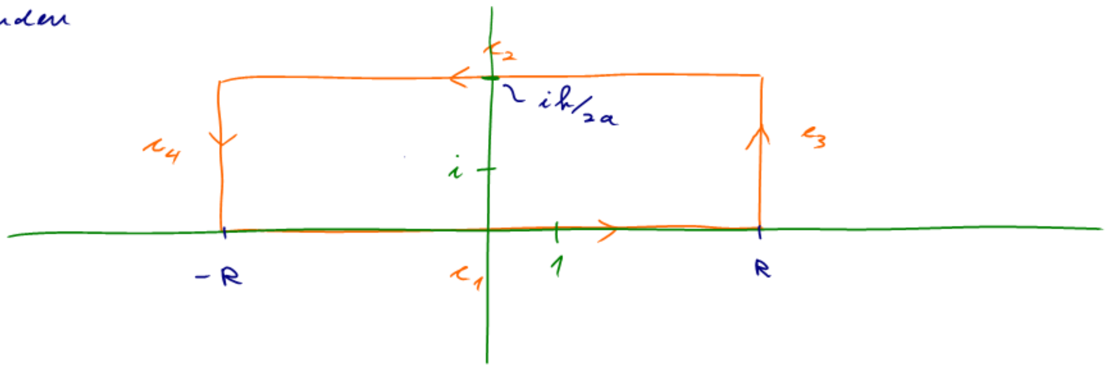
behauptlich
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\; e^{b^2/4a}} \qquad (*)$$

abgeleitet aus $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ und Substitution $u = x - b/2a$:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx \cdot e^{-b^2/4a} \longrightarrow (*)$$

(*) auch gültig für $b \in \mathbb{C}$? (etwa $b = ik$, $k \in \mathbb{R}$)

betrachte dazu folgenden Weg $c_R \subset \mathbb{C}$:



d.h. $\quad c_R = c_1 + c_3 + c_2 + c_4$

mit $\quad c_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad u \longmapsto u$

$c_2 : [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad x \longmapsto -x + i k/2a$

$c_3 : [0, k/2a] \to \mathbb{C}, \quad t \longmapsto R + it$

$c_4 : [0, k/2a] \to \mathbb{C}, \quad t \longmapsto -R + i\frac{k}{2a} - it$

$$\to \quad I_1 \equiv \int_{c_1} e^{-az^2} dz = \int_{-R}^{R} e^{-au^2} du \xrightarrow{R\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$I_2 \equiv \int_{c_2} e^{-az^2} dz = -\int_{-R}^{R} e^{-ax^2 + ikx} e^{-k^2/4a} dx \xrightarrow{R\to\infty} -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ikx} dx \, e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

$$I_3 = \int_{c_3} e^{-az^2} dt = i \int_0^{k/2a} e^{-aR^2} e^{-2iaRt} e^{-at^2} dt \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

ebenso $\quad I_4 \longrightarrow 0 \quad$ für $R \to \infty$;

nun ist e^{-az^2} holomorph auf $\mathbb{C}$ und $C_R = C_1 + C_3 + C_2 + C_4$ geschlossen, weshalb nach C. Integralsatz

$$0 \overset{!}{=} \int_{C_R} e^{-az^2} dz = I_1 + I_3 + I_2 + I_4$$

im limes $R \to \infty$ also $\quad -I_2 = I_1$, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-k^2/4a} \qquad \checkmark$$