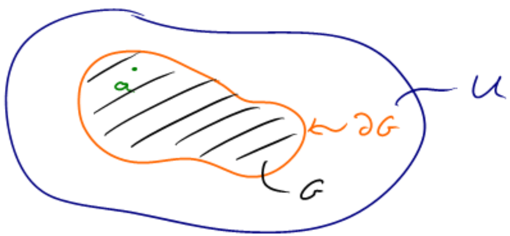
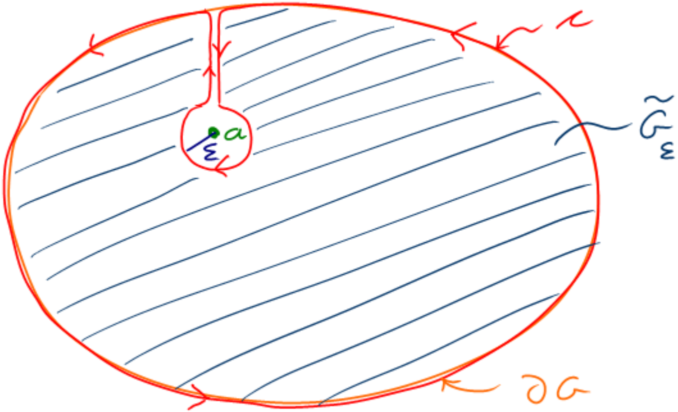
Cauchysche Integralformel

$f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, $G \subset U$ einfach zusammenhängendes Gebiet, $\partial G \subset U$; für alle $a \in G$ ist

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a}\, dz}$$



Zum Beweis der Formel betrachte folg. geschl. Weg $\underline{\underline{\gamma}} \equiv \partial \tilde{G}_\varepsilon$



da $\dfrac{f(z)}{z-a}$ holomorph auf $\tilde{G}_\varepsilon$

ist nach Cauchyschem Integralsatz

$$0 \overset{!}{=} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$= \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{K_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$\boxed{\gamma \overset{!}{=} \partial G - K_\varepsilon(a)}$$

d.h.

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \underbrace{\int_{K_\varepsilon(a)} \underbrace{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}_{=f'(a)}\,dz}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0}\ 0} + \underbrace{\int_{K_\varepsilon(a)} \frac{f(a)}{z-a}\,dz}_{=\underline{\underline{2\pi i\, f(a)}}} .$$

Potenzreihenentwicklungssatz

Eine holomorphe Fkt. $f : U \to \mathbb{C}$ kann um $z_0 \in U$ durch eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ auf $B_r(z_0)$ entwickelt werden (solange $B_r(z_0) \subset U$).

Dabei gilt:

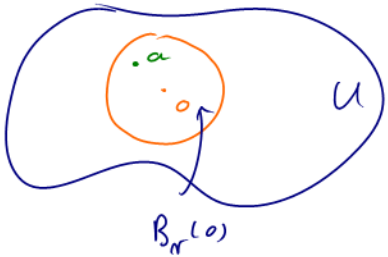
$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz$$

Folgerung

Jede holomorphe Fkt. ist beliebig oft diff.bar!

Beweis:

O.B.d.A. $z_0 = 0$; nach Integralformel ist



$a \in \mathring{B}_r(0)$

$$\underline{f(a)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r(0)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r(0)} \frac{f(z)}{z}\cdot \underbrace{\frac{1}{1-a/z}}_{=\sum_{n=0}^{\infty} (a/z)^n}\,dz$$

$|a/z| < 1$,

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dx\right)}_{=: c_n} a^n \quad !$$