Singularitäten, meromorphe Fkt., Laurent-Reihe, Residuen

$\rightsquigarrow$ Residuensatz

Singularitäten:

isolierte Singularität z_0 der holomorphen Fkt

$f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ ist

1) hebbar $:\Longleftrightarrow$ $\exists!\, a \in \mathbb{C}$: $\tilde{f}(z) := \begin{cases} a & : z = z_0 \\ f(z) & : z \in U \setminus \{z_0\} \end{cases}$

holomorph

2) Pol von Ordnung k $:\Longleftrightarrow$ z_0 ist hebbare Singularität von $(z-z_0)^k f(z)$ und nicht-hebbare Singularität von $(z-z_0)^{k-1} f(z)$

3) wesentlich $:\Longleftrightarrow$ z_0 weder hebbare Sing. noch Pol von f.

Meromorphe Funktion

$f: U \to \mathbb{C}$ meromorph $:\Longleftrightarrow$ $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph bis auf Polstellen $z_1, z_2, z_3, \ldots \in U$

Laurent-Reihe

Jede meromorphe Fkt. f kann um eine Polstelle z_0 durch Laurent-Reihe entwickelt werden:

z_0 sei Pol k-ter Ordnung von f, d.h. $(z-z_0)^k f(z)$ holomorph und kann durch Potenzreihe entwickelt werden:

$$(z-z_0)^k f(z) = b_0 + b_1 (z-z_0) + b_2 (z-z_0)^2 + \cdots$$

$$\hookrightarrow \quad f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^k} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \frac{b_2}{(z-z_0)^{k-2}} \cdots$$

$$\cdots + \frac{b_{k-1}}{z-z_0} + b_k + b_{k+1}(z-z_0) + \cdots$$

d.h.

$$\boxed{\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \\ &= \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots \end{aligned}}$$

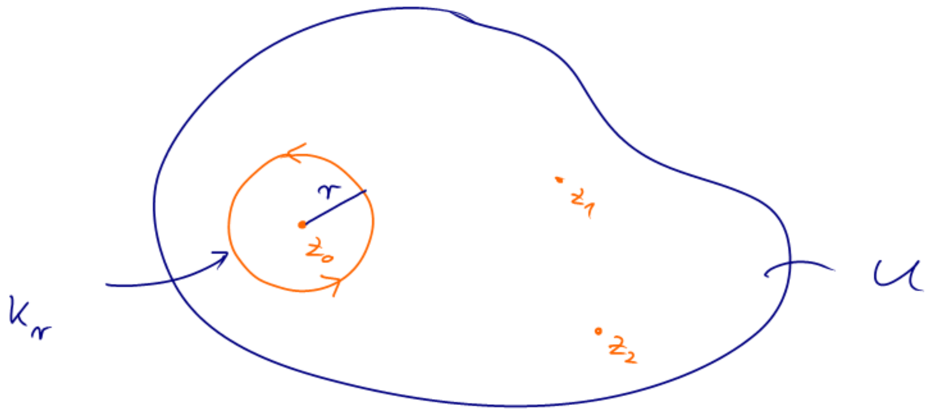
<u>Laurent-Reihe</u> von f um Pol k-ter Ordnung bei z_0

Residuum

einer meromorphen Fkt. $f: U \to \mathbb{C}$ bei Polstelle z_0:

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(z)\, dz}$$

(r so, dass $B_r(z_0) \subset U$)



Berechnungsmethoden:

1) anhand Laurent-Reihe: $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

$$\rightarrow \int_{K_r(z_0)} f(z)\,dz = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{K_r(z_0)} (z-z_0)^n dz}_{= 2\pi i \cdot \delta_{n,-1}} = 2\pi i \; c_{-1}$$

d.h. $$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1}}$$

2) z_0 sei Pol 1. Ordnung von f:

d.h. $$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1 (z-z_0) + \dots$$

$$\rightarrow (z-z_0) f(z) = c_{-1} + c_0 (z-z_0) + c_1 (z-z_0)^2 + \dots$$

d.h. $$c_{-1} \overset{!}{=} \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$$

Pol 1. Ordnung

nach 1) also $$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)}$$

3) g und h seien holomorphe Fkten, z_0 sei einfache Nullstelle von h; dann $f = \frac{g}{h}$ meromorph mit Pol 1. Ordnung in z_0; nach 2) also

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \right) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{(h(z) - h(z_0))/(z - z_0)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}} \; ! \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) \overset{!}{=} \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}$$

4) i. A. kann c_{-1} und damit $\operatorname{Res}(f, z_0)$ immer durch Ableiten in z_0 aus

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \dots + \underline{\underline{c_{-1}}}\,\underline{(z - z_0)^{k-1}} + \dots$$

gewonnen werden:

$\underline{\underline{z_0}}$: Pol $\underline{\underline{k}}$-ter Ordnung

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, \underline{\underline{z_0}}) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big|_{z = z_0} \left((z - z_0)^k f(z) \right)}$$

Beispiele:

- $$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{z-z_0},\ z_0\right) \overset{2)}{=} g(z_0)$$

- $$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{\sin z},\ 0\right) \overset{3)}{=} \frac{g(0)}{\cos 0} = g(0)$$

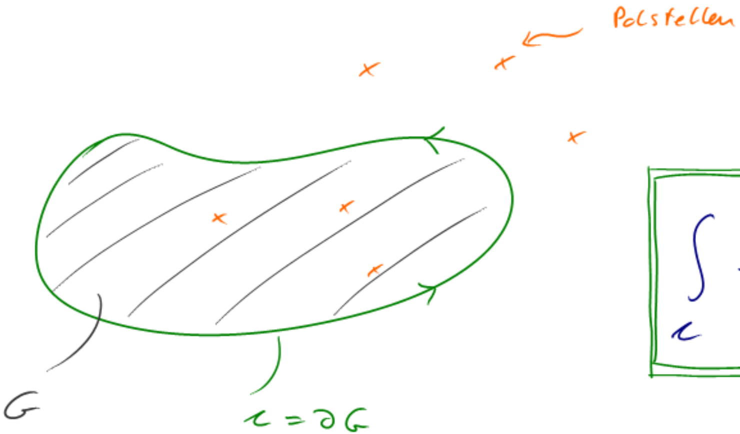
- $$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{\sin z},\ \pi\right) \overset{3)}{=} \frac{g(\pi)}{\cos \pi} = -g(\pi)$$

- $$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{z^3},\ 0\right) \overset{4}{=} \frac{1}{2!}\,\frac{d^2}{dz^2}\Big|_0\left(\cancel{z^3}\,\frac{g(z)}{\cancel{z^3}}\right) = \frac{1}{2}\,g''(0)$$

Residuensatz (für "einfache" Wege)

$f: U \to \mathbb{C}$ meromorph mit Polstellenmenge $S = \{z_1, z_2 \ldots\} \subset U$; $G \subset U$ einfach zusammenhängendes Gebiet,

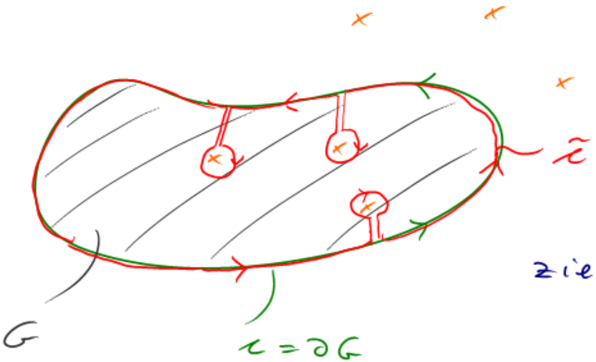
c sei Rand von G in positiver Orientierung: $c = \partial G$;



dann

$$\boxed{\int_c f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S \cap G} \operatorname{Res}(f, z_0)}$$

zum Beweis betrachte Weg $\tilde{\tau}$ wie folgt:



$\tilde{\tau}$ lässt sich offenbar stetig auf Punkt zusammenziehen <u>ohne</u> Polstellen zu kreuzen;

$\longrightarrow$ $\tilde{\tau}$ verläuft in einem einf. zushgd. Gebiet $\tilde{G}$, auf dem $\tilde{f}$ <u>holomorph</u>; nach Cauchyschem Integralsatz also

$$0 \overset{!}{=} \int_{\tilde{\tau}} f(z)\,dz = \int_{\tau} f(z)\,dz - \sum_{z_0 \in S \cap G} \int_{K_r(z_0)} f(z)\,dz$$

d.h.

$$\int_{\tilde{\tau}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S \cap G} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(z)\,dz}_{= \operatorname{Res}(f, z_0)} \qquad \square$$