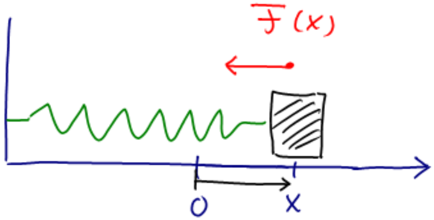
Beispiele / Ausblick: Lineare Abbildungen in der Physik

Mechanik: Schwingungen um Gleichgewichtslagen

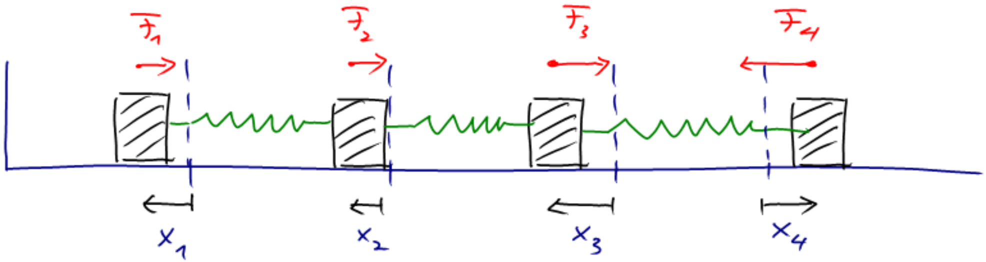
$d = 1$:



$$F(x) = -k\,x$$

Kraft ist lineare Fkt. der Auslenkung x

$d = 4$:



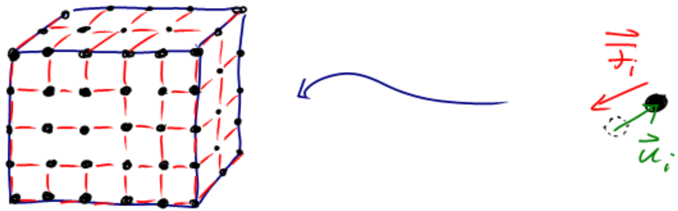
$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_4 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F = -Kx}$$

mit linearer Abb. $K : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$x \longmapsto k \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 - x_1 - x_3 \\ 2x_3 - x_2 - x_4 \\ x_4 - x_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{d \approx 10^{23}}$:



$F = (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$

$x = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N) \in \mathbb{R}^3$

$$\boxed{F = -Kx}$$

mit linearer Abb. $K : \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N}$

$x \longmapsto \dots$

<u>unabhängig von d</u>:

Schwingungsfrequenzen und -moden ergeben(*) sich aus Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abb. K !

(*): später; spätestens in TP1 (Mechanik) !

Elektrodynamik: elektromagnetische Wellen (im Vakuum)

elektromag. Potenziale $\varphi(\vec{r},t)$ und $\vec{A}(\vec{r},t)$ $(\longrightarrow \vec{E}, \vec{B})$

genügen Wellengleichung

$$\boxed{\Box \varphi = 0 \quad , \quad \Box \vec{A} = 0}$$

$\Box$ = D'Alembert-Operator

$\equiv$ lineare Abb.: $\quad f \mapsto \Box f := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

$\Rightarrow$ Ker $\Box$ ist UVR $\hat{=}$ Superpositionsprinzip:

$\varphi_1(\vec{r},t)$, $\varphi_2(\vec{r},t)$

$\Rightarrow \varphi_1(\vec{r},t) + \varphi_1(\vec{r},t)$

Quantenmechanik

q.m. Zustandsraum $\stackrel{!}{=}$ komplexer Vektorraum ($\mathcal{H}$)

$\rightsquigarrow$ v Zustand, u Zustand $\Rightarrow$ $\boxed{v + u \text{ auch Zustand!!}}$

Superposition von v und u

Beispiel:

v = Spin-up: $\uparrow$

u = Spin-down: $\downarrow$

$\longrightarrow$ $v + u = \uparrow + \downarrow$ ✓

berühmt-berüchtigt:

v = lebendige Katze: 

u = tote Katze: 

$\longrightarrow$ $v + u$ = "Schrödingers Katze":  +  (?!)

q. m. Zeitentwicklung (Dynamik):

Zustand zur Zeit $t = 0$: $\qquad$ Zustand zur Zeit $t > 0$:

$$v_0 \xmapsto{\;U_t\;} v(t) = U_t\, v_0$$

U_t: Zeitentwicklungsoperator = lineare Abb. $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

„Problem": $\quad v + u \xrightarrow{\;t\;} U_t(v+u) = U_t v + U_t u$

Superposition bleibt Superposition !

(Linearität von U_t !)

Gilt auch für Schrödingers Katze !?!

$\longrightarrow$ QM I, QM II: Dekohärenz (~ Zeh, 1970) ...