Verhettung linearer Abb.en, Operator, Operatorpotenz, Gruppe $GL(V)$

Die Verhettung zweier linearer Abb.en $A : V \longrightarrow W$, $B : W \longrightarrow U$ ergibt offenbar wieder eine lineare Abb.

$$B \circ A : V \longrightarrow U$$
$$v \longmapsto B(Av)$$

Konvention: "B nach A": $B \circ A \equiv BA$ ("B mal A")

- lineare Abben $A, B : \underline{V} \longrightarrow \underline{V}$ können beliebig verhettet werden:

$$AB, \quad BA, \quad AAA, \quad BABA, \quad \dots \quad : V \longrightarrow V$$

Definition

(linearer) Operator A auf V := lineare Abb. $A : V \longrightarrow V$

Definition:

ganzzahlige Potenzen eines Operators / einer linearen Abb $V \to V$

- $A^n := \underbrace{A A \cdots A}_{n \text{ mal}} = (A \circ A \circ \cdots \circ A) \quad : \quad n \geq 1$

- $A^0 := \mathbb{1}_V \quad : \quad$ sofern $A \neq 0$

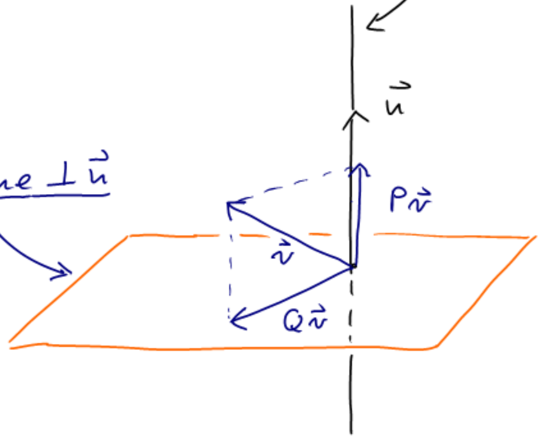
- $A^{-1} :=$ inverse Abbildung zu A (sofern existent)

- $A^{-n} := (A^{-1})^n$ (" ")

- $\mathbb{1}_V$ ist die identische Abb: $V \to V$, $v \mapsto v$; oft $\mathbb{1}_V \equiv 1$
- $A^{-1} \equiv \frac{1}{A}$

Beispiele: 1) $\boxed{\begin{array}{llll} P: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{v} & \longmapsto & \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle \, \vec{n} \end{array}}$: Projektion auf Gerade $\parallel \vec{n}$:

$\boxed{Q := \mathbb{1}_3 - P}$: Projektion auf Ebene $\perp \vec{n}$



$\longrightarrow$ (i) $\quad Q + P = \mathbb{1}_3$

(ii) $\quad P^2 = PP \overset{!}{=} P, \quad \longrightarrow$ für $n > 0$: $\quad P^n = P$ ✓

(iii) $\quad Q^2 = (1 - P)(1 - P) = 1 - P - P + P^2 \overset{(ii)}{=} 1 - P = Q$

$\longrightarrow$ für $n > 0$: $\quad Q^n = Q$ ✓

(iv) $\quad PQ = P(1 - P) = P - P^2 \overset{(ii)}{=} P - P = 0$ ✓

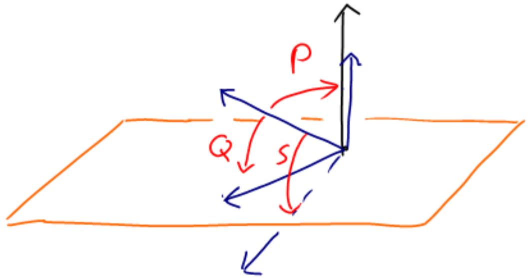
1b)

$$\boxed{\begin{aligned} P: \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} &\mapsto \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle \vec{n} \end{aligned}}$$

$$\boxed{Q := \mathbb{1}_3 - P}$$

Spiegelung an Ebene:

$$\boxed{S = Q - P}$$



$\rightsquigarrow$ (v) $\quad S^2 = (Q-P)(Q-P) = \underset{\overset{\shortparallel}{Q}}{Q^2} - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{QP} - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{PQ} + \underset{\overset{\shortparallel}{P}}{P^2} = Q + P \underset{(i)}{=} \mathbb{1}$ ✓

$$\rightsquigarrow S^{2n} = \mathbb{1}$$

(vi) $\quad S^3 = S^2 S \overset{(v)}{=} \mathbb{1} S = S$ ✓

$$\rightsquigarrow S^{2n+1} = S$$

(vii) $\quad SS = \mathbb{1} \rightsquigarrow S = S^{-1}$ (S selbstinvers)

$$\rightsquigarrow S^{-2n} = \mathbb{1}, \quad S^{-2n-1} = S$$

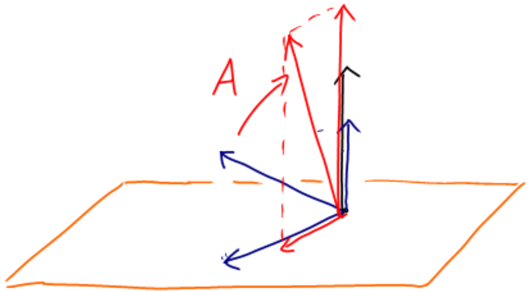
1c)

$$\boxed{\begin{aligned} P : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} &\longmapsto \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle \, \vec{n} \end{aligned}}$$

$$\boxed{Q := \mathbb{1}_3 - P}$$

$$\boxed{A := \lambda_1 P + \lambda_2 Q}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = 1/2$

(viii) $$A^n = (\lambda_1 P + \lambda_2 Q)^n = (\lambda_1 P + \lambda_2 Q)(\lambda_1 P + \lambda_2 Q) \cdots (\lambda_1 P + \lambda_2 Q)$$

$$= \lambda_1^n P + \lambda_2^n Q$$

$PQ = QP = 0$,
$P^n = P$, $Q^n = Q$

(ix) $$A^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda_1} P + \frac{1}{\lambda_2} Q \right) ; \quad \text{denn} \quad \left(\frac{1}{\lambda_1} P + \frac{1}{\lambda_2} Q \right)(\lambda_1 P + \lambda_2 Q)$$

$$= P + Q = \mathbb{1} .$$

2) P_k : VR der ganzrationalen Fkt. max. kten Grades ;

$$\frac{\partial}{\partial x} : P_k \longrightarrow P_k$$

$$\longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x} \cdots \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} : \text{ n-te Ableitung}$$

Operator - Funktionen

eine ganzrationale oder analytische Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

definiert auf natürliche Weise eine Operator-Fkt $\mathcal{L}(V,V) \longrightarrow \mathcal{L}(V,V)$ gemäß

$$\boxed{f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n}$$

Beispiel: Exponentialfunktion der Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ (vgl QM)

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(a \frac{\partial}{\partial x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}$$

$a \in \mathbb{R}$

Bedeutung? $\rightarrow$

$f(x)$ sei analytische (d.h.: glatte) Funktion;

dann:

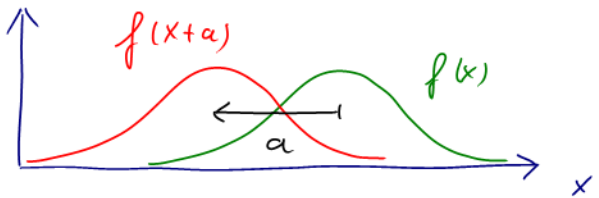
$$\left(e^{a\frac{\partial}{\partial x}}\right) f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, a^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}\right) f(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\, a^n$$

$$\overset{!}{=} f(x+a)$$

(Taylor-Entwicklung)$^{-1}$

d.h.: $e^{a\frac{\partial}{\partial x}}$: $f(x) \longmapsto f(x+a)$



$$\boxed{e^{a\partial/\partial x} \;\hat{=}\; \text{Translation um } -a}$$

(vgl. QM: $\hat{p} \overset{!}{=} i \frac{\partial}{\partial x}$)

Allgemeine lineare Gruppe über V: $GL(V)$

Menge der invertierbaren linearen Abb.en $V \to V$ bilden mit der Verkettung $A \circ B \equiv AB$ die allgemeine lineare Gruppe $GL(V)$.

Gruppeneigenschaften

(i) Assoziativität: $A(BC) = (AB)C$

(ii) Einselement $\mathbb{1}_V$: $A\mathbb{1}_V = \mathbb{1}_V A = A$

(iii) für jedes $A \in GL(V)$ existiert inverses Element $A^{-1} \in GL(V)$:

$$AA^{-1} = \mathbb{1}_V$$

Gruppe $GL(V)$ nicht kommutativ: i. A. $AB \neq BA$!

$\rightarrow$ Rechnungen mit Operatoren fast wie gewohnt :

z. B. :

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$: $\quad 1 + q + q^2 + \dots = \sum_{\ell=0}^{\infty} q^\ell = \frac{1}{1-q}$

$(GL(V), +, \circ)$: $\quad 1 + A + A^2 + \dots = \sum_{\ell=0}^{\infty} A^\ell = (1-A)^{-1} \equiv \frac{1}{1-A}$

(solange Reihen konvergent)

evtl. Nichtkommutativität beachten:

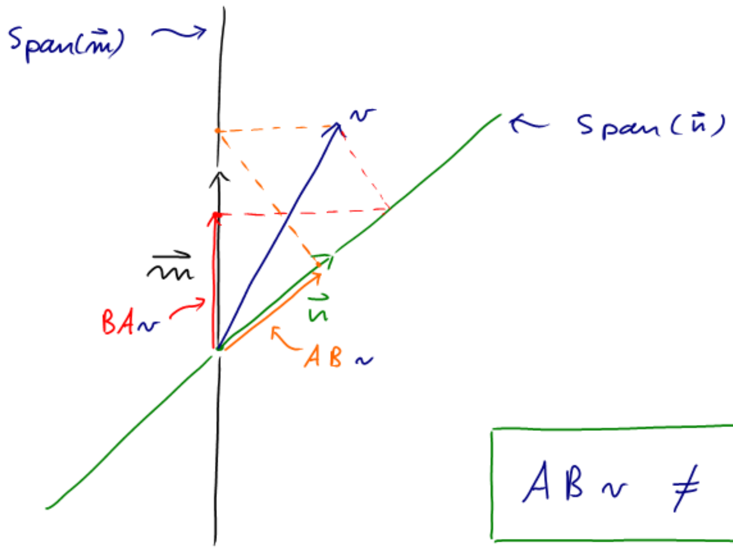
z. B $\quad AB \neq BA \quad \rightarrow \quad e^A e^B \neq e^{A+B}$!

Beispiel für $AB \neq BA$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$:

A : Projektion auf $\operatorname{Span}(\vec{u})$

B : Projektion auf $\operatorname{Span}(\vec{m})$

wobei weder $\vec{u} \parallel \vec{m}$ noch $\vec{u} \perp \vec{m}$!



$$\boxed{ABv \neq BAv}$$

$\ulcorner$ $\tilde{A} := A + \varepsilon(1 - A)$, $\tilde{B} := B + \varepsilon(1 - B) \in GL(V)$ $\xrightarrow{\varepsilon \to 0}$ $\lrcorner$