Darstellung linearer Abb.en durch Matrizen

- lineare Abb. $A : V \to W$
- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V
- $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ Basis von W

$$
\begin{tikzcd}
V \ni & v \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, leftrightarrow] & w = Av & \in W \\
\mathbb{K}^n \ni & {}_{\mathcal{B}}v \arrow[r, mapsto, "?"] & {}_{\mathcal{C}}w \arrow[u, leftrightarrow] & \in \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

${}_{\mathcal{B}}v$ = Komponentenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$

${}_{\mathcal{C}}w$ = Komponentenvektor von w bzgl. $\mathcal{C}$

gesucht: $\boxed{\text{direkter Weg von } {}_{\mathcal{B}}v \text{ nach } {}_{\mathcal{C}}w \,!}$

benötigen:

(i) Die Bilder der Basisvektoren $b_1, b_2, \dots, b_n$ unter A,

$$A_1 := A b_1 , \quad A_2 := A b_2 , \quad \dots , \quad A_n = A b_n ,$$

bestimmen vollständig die lin. Abb. A !

denn $A v = A \sum_i v_i b_i \overset{A \text{ linear}}{=} \sum_i v_i A b_i = \sum_i v_i A_i$ ✓ $(*)$

${}_B v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

(ii) Komponenten der Basisbilder $A_1, A_2, \dots, A_n$ bzgl. Basis C:

$$A_1 = \sum_{j=1}^{m} A_{j1} c_j , \quad A_2 = \sum_{j=1}^{m} A_{j2} c_j , \quad \dots , \quad A_n = \sum_{j=1}^{m} A_{jn} c_j \qquad (**)$$

$\rightsquigarrow$ insgesamt $n \cdot m$ Koeffizienten $(A_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,n}}$

die Koeffizienten A_{ji} definieren Abbildungsmatrix

$$ {}_{C}A_{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{2} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} $$

der Abb. $A: V \longrightarrow W$ bzgl Basen B und C.

Abbildungsmatrix ${}_{C}A_{B}$ erlaubt direkte Bestimmung der Komponenten ${}_{C}w$ des Bildes $w = Av$ anhand der Komponenten ${}_{B}v$ des Urbilds v durch Matrix-Vektor-Multiplikation

$$ \underset{m\text{-Vektor}}{{}_{C}w} = \overset{m \times n\text{-Matrix}}{{}_{C}A_{B}} \cdot \underset{n\text{-Vektor}}{{}_{B}v} $$

; ausgeschrieben:

$$ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} $$

d.h.

$$\boxed{w_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} v_i}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \boxed{w_j} \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{j1} & A_{j2} & \cdots & A_{jn} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$w_j = A_{j1} v_1 + A_{j2} v_2 + \cdots + A_{jn} v_n$$

Warum?

$$A v \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} v_i A_i \overset{(**)}{=} \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\sum_{j=1}^{m} A_{ji} e_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} A_{ji} v_i \right)} e_j$$

$$\overset{!}{=} w = \sum_{j=1}^{m} \boxed{w_j} e_j$$

hilfreich:

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix}\\ &\qquad = \text{Bilder der Basisvektoren}:\\ &{}_C A_B = \left({}_C(A b_1),\ {}_C(A b_2),\ \dots,\ {}_C(A b_n) \right)\end{aligned}}$$

Beispiele:

1) Projektion $P: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \longmapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle \vec{n}$, $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Basis $B \equiv C = \left(\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\rightarrow$ Abb.-matrix $\quad {}_B P_B = \Big(\underset{\overset{\|}{n_1 \vec{n}}}{P\vec{e}_1},\ \underset{\overset{\|}{n_2 \vec{n}}}{P\vec{e}_2},\ \underset{\overset{\|}{n_3 \vec{n}}}{P\vec{e}_3} \Big) = \begin{pmatrix} n_1 n_1 & n_2 n_1 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & n_2 n_2 & n_3 n_2 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3 n_3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \quad \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle \vec{n} \overset{!}{=} P\vec{a} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} n_1 n_1 & n_2 n_1 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & n_2 n_2 & n_3 n_2 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3 n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ✓

2) $\frac{\partial}{\partial x} : P_2 \longrightarrow P_1$; $B = (1, x, x^2)$ Basis von P_2

$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}$; $C = (1, x)$ Basis von P_1

$\rightarrow$ Bilder der Basisvektoren von B unter $\frac{\partial}{\partial x}$:

$$\frac{\partial 1}{\partial x} = 0 \;;\quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \;;\quad \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x \;,$$

in Komponentendarstellung bzgl. C:

$${}_C\left(\frac{\partial 1}{\partial x}\right) = {}_C(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ;\quad {}_C\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) = {}_C(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\quad {}_C\left(\frac{\partial x^2}{\partial x}\right) = {}_C(2x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$

$$\boxed{{}_C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

z.B. Berechnung von $\frac{\partial f}{\partial x}$ für $f(x) = 5x^2 + x$:

$$_B f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \ _C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \ _C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_B \ _B f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

d.h. $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot 1 + 10 \cdot x = 1 + 10x$ ✓

$B = (1, x, x^2)$

$C = (1, x)$

$$_C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$