Motivation:

$$\text{allg. Vektorraum } V \xleftrightarrow{\text{Basis } B} \mathbb{K}^n$$

$$V \ni v \xleftrightarrow{v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i} {}_B v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$V \ni w \qquad {}_B w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$v + w \qquad {}_B(v + w) = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda v \qquad {}_B(\lambda v) = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

analog:

lineare Abbildungen $V \longrightarrow W$	Basis B von V Basis C von W $\longleftrightarrow$	$m \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$
$\mathcal{L}(V, W) \ni R$	$\longleftrightarrow$	${}_C R_B = (R_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \equiv \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots \\ R_{21} & R_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$
S		${}_C S_B = (S_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$
$R + S$		${}_C (R + S)_B = (R_{ij} + S_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$
λR		${}_C (\lambda R)_B = (\lambda R_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$
$w = R v$		${}_C w = {}_C R_B \, {}_B v$

lin. Abb.en : $V \to V$ $\equiv$ Operatoren auf V .

$$\mathcal{L}(V,V) \ni R, S \quad \xleftrightarrow{\text{Basis } \mathcal{B}} \quad {}_{\mathcal{B}}R_{\mathcal{B}}\,, \quad {}_{\mathcal{B}}S_{\mathcal{B}}$$

$$R\,S \quad \longleftrightarrow \quad {}_{\mathcal{B}}(RS)_{\mathcal{B}} = \,?$$

$$R^n \qquad\qquad {}_{\mathcal{B}}(R^n)_{\mathcal{B}} = \,?$$

$$R^{-1} \qquad\qquad {}_{\mathcal{B}}(R^{-1})_{\mathcal{B}} = \,?$$

$$f(R) \qquad\qquad {}_{\mathcal{B}}f(R)_{\mathcal{B}} = \,?$$

$\rightarrow$ benötigen <u>Matrixmultiplikation</u>, <u>Matrixinversion</u>, <u>Matrixpotenzen</u>, <u>Matrix-Fkten</u>, ...

$\rightarrow$

Matrixverknüpfungen und -umformungen

$m \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$:

$(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C})$

$$A = (A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots n}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} \in \mathbb{K}$$

Zeilenindex (i), Spaltenindex (j)

m = Anzahl der <u>Zeilen</u>

n = Anzahl der <u>Spalten</u>

Menge aller $m \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$: $M(m, n; \mathbb{K})$

mit Matrixaddition

$$A + B := (A_{ij} + B_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}$$

und Skalarmultiplikation

$$\lambda A := (\lambda A_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}$$

bildet $M(m,n;\mathbb{K})$ einen reellen/komplexen Vektorraum ;

Standardbasis :

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{c} \downarrow \ j\text{-te Spalte} \end{array} & \\ E_{ij} = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$i = 1 \ldots m, \quad j = 1 \ldots n$

$$\longrightarrow \quad A = \sum_{ij} A_{ij} E_{ij}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\dim M(m,n) = m \cdot n}$$

(n-dimensionale) Einheitsmatrix

$$\mathbb{1} \equiv \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} \in M(n,n)$$

Matrixmultiplikation : $A, B \longmapsto C = AB$

$$\boxed{\begin{aligned} & M(m,n) \times M(n,k) \longrightarrow M(m,k) \\ & (A_{ij}), (B_{jl}) \longmapsto \left(C_{il} := \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jl} \right) \end{aligned}}$$

__Beispiele:__

1)
$$\overset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \overset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}} = \overset{2\times 4}{\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}}$$

2)
$$\overset{2\times 2}{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}} \overset{2\times 1}{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}} = \overset{2\times 1}{\begin{pmatrix} A_{11}v_1 + A_{12}v_2 \\ A_{21}v_1 + A_{22}v_2 \end{pmatrix}}$$

beachte: $M(m, 1; \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}^m$

3)
$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

4)
$$\mathbb{1} A = A \mathbb{1} = A$$

(d.h. $\mathbb{1}$ neutrales Element der Matrixmultiplikation)

5) Multiplikation __diagonaler__ Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & & 0 \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

- Matrixmultiplikation ist <u>assoziativ</u>,

$$A(BC) = (AB)C \equiv ABC$$

aber <u>nicht</u> <u>kommutativ</u>, d.h. i.A. $AB \neq BA$

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{array}{ccccccccc} E_{12} \, E_{21} & = & E_{11} & \neq & E_{22} & = & E_{21} \, E_{12} \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \neq & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Matrixaddition und -multiplikation genügen <u>Distributivgesetz</u>:

  - $(A+B)C = AC + BC$

  - $C(A+B) = CA + CB$

Definition: **Invertierbarkeit, inverse Matrix**

Eine Matrix $A \in M(n,n)$ ist **invertierbar** g. d. w. eine Matrix $A^{-1} \in M(n,n)$ existiert derart, dass

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1} .$$

A^{-1} ist die zu A **inverse Matrix**

Beispiele

1) Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ mit $a_i \neq 0$ ist invertierbar mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$

2) $A, B \in M(n,n)$ invertierbar $\longrightarrow$ AB invertierbar und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\Big[$ denn $B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{\mathbb{1}}B = B^{-1}B = \mathbb{1}$, $A\underbrace{BB^{-1}}_{\mathbb{1}}A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{1} \Big]$

→ Teilmenge der <u>invertierbaren</u> Matrizen in $M(n,n)$

- abgeschlossen unter Matrixmultiplikation
- enthält neutrales Element $\mathbb{1}$

→ Menge der <u>invertierbaren</u> $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$ bildet mit Matrixmultiplikation eine <u>Gruppe</u>, die <u>allgemeine lineare Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$</u>

(eng verwandt mit $GL(V)$! s.u.)

Wie lässt sich die inverse Matrix A^{-1} einer allg. Matrix $A \in GL(n, \mathbb{K})$ bestimmen ?

→ <u>Gaußverfahren</u> (später!)

Definition :

ganzzahlige Potenzen einer Matrix $A \in M(n,n)$

- $A^n := \underbrace{A\,A \cdots A}_{n \text{ mal}}$: $n \geq 1$

- $A^0 := \mathbb{1}$

- $A^{-n} := (A^{-1})^n$ (sofern A invertierbar)

$\rightsquigarrow$ ganzrat. bzw. analytische Fkt. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definiert

Matrix-Funktion

$$\boxed{f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n}$$

Beispiel: Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \quad A^\ell = \begin{pmatrix} a_1^\ell & & & \\ & a_2^\ell & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^\ell \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad e^A = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \begin{pmatrix} a_1^\ell & & & \\ & a_2^\ell & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^\ell \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{a_1} & & & \\ & e^{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_n} \end{pmatrix}$$

Transposition einer Matrix

$$(\ldots)^T : \quad M(m,n) \longrightarrow M(n,m)$$

$$A = (A_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}} \longmapsto A^T \text{ mit } (A^T)_{ij} := A_{ji}$$

d.h. Transposition vertauscht genau Spalten und Zeilen einer Matrix:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & & \cdots & \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & & \cdots & \end{pmatrix}$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} ; \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^T = (v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_n)$$

Anwendung: Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^m$:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{m} v_i w_i = (v_1\ v_2 \cdots v_m)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = v^T w$$

d.h. $$\boxed{\langle v, w\rangle = v^T w}$$

$\rightarrow$ Projektion $P: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $a \mapsto u\langle u, a\rangle$, $\quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $|u| = 1$

$$Pa = u\underbrace{\langle u, a\rangle}_{u^T a} = u(u^T a) = \underbrace{(u u^T)}_{} a$$

$\llcorner$ Abbildungsmatrix ${}_B P_B$!

//

$$u u^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}(u_1\ u_2 \cdots u_m) = \begin{pmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & \cdots & u_1 u_m \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & \cdots & u_2 u_m \\ \vdots & & & \\ u_m u_1 & u_m u_2 & \cdots & u_m u_m \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (i) & (A^T)^T = A \\ (ii) & (A+B)^T = A^T + B^T \\ (iii) & (AB)^T = B^T A^T \\ (iv) & (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \end{array}}$$

zu (iii):

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_\ell \underset{\overset{\shortparallel}{(A^T)_{\ell i}}}{A_{j\ell}} \underset{\overset{\shortparallel}{(B^T)_{i\ell}}}{B_{\ell i}} = \sum_\ell (B^T)_{i\ell} (A^T)_{\ell i}$$

$$= (B^T A^T)_{ij}$$

zu (iv):

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{1} = \mathbb{1}^T = (AA^{-1})^T \underset{(iii)}{=} (A^{-1})^T A^T \\ \phantom{\mathbb{1}} = (A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T \end{array}\right\} \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$