Lineare Abbildungen und Matrizen

$$\boxed{\mathcal{L}(V, W) \longleftrightarrow M(m, n)}$$

Basis $C = (c_1, \dots, c_m)$

Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$

(i) $\mathcal{L}(V, W) \ni R, S \longleftrightarrow {}_{C}R_{B},\ {}_{C}S_{B} \in M(m, n)$

(ii) $R + S \longleftrightarrow {}_{C}R_{B} + {}_{C}S_{B}$

(iii) $\lambda R \longleftrightarrow \lambda\, {}_{C}R_{B}$

(iv) $T \in \mathcal{L}(W, U)$: $\boxed{TS \longleftrightarrow {}_{D}T_{C}\ {}_{C}S_{B}} \in M(k, n)$

Basis $D = (d_1, \dots, d_k)$

(v) $R \in \mathcal{L}(V, \underline{V})$: $\quad R^n \longleftrightarrow ({}_BR_B)^n \in \mathcal{M}(n,n)$

(vi) insbes.: $\quad R^{-1} \longleftrightarrow ({}_BR_B)^{-1}$

(vii) $\quad f(R) \longleftrightarrow f({}_BR_B)$

$\longrightarrow$ Lineare Abbildungen $\in \mathcal{L}(V, W)$ und deren Verknüpfungen entsprechen exakt den Matrizen $\in \mathcal{M}(m,n)$ und deren Verknüpfungen.

d.h.

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{L}(V, W) \text{ ist isomorph zu } \mathcal{M}(m,n) \\ \mathcal{L}(V,W) \cong \mathcal{M}(m,n) \end{array}}$$

(i), (ii), (iii) : ✓ (v), (vi), (vii) folgen direkt aus (iv) ✓

bleibt zu zeigen:

(iv) $$_D(TS)_B \overset{!}{=} {}_DT_C \, {}_CS_B$$

Verkettung

Matrixmultiplikation

$T \in \mathcal{L}(W, U)$ $\qquad {}_DT_C \in M(k, m)$

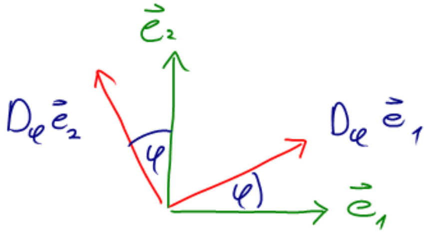
$S \in \mathcal{L}(V, W)$ $\qquad {}_CS_B \in M(m, n)$

$B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V

$C = (c_1, \dots, c_m)$ Basis von W

$D = (d_1, \dots, d_k)$ Basis von U

Beispiele: 1) Drehung in der Ebene um Winkel φ:



$$D_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

$$D_\varphi \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_B , \quad D_\varphi \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_B \quad \rightarrow \quad {}_B(D_\varphi)_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D_\varphi D_\psi \overset{?}{=} D_{\varphi+\psi}} :$$

$${}_B(\underline{\underline{D_\varphi D_\psi}})_B = {}_B(D_\varphi)_B \; {}_B(D_\psi)_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi \\ \underbrace{\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi}_{\hat{=}\,\sin(\varphi+\psi)} & \underbrace{-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi}_{\hat{=}\,\cos(\varphi+\psi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} {}_B(\underline{\underline{D_{\varphi+\psi}}})_B \quad ✓$$

2) $T = \frac{\partial}{\partial x} : P_3 \to P_3$; $S = \frac{\partial^2}{\partial x^2} : P_3 \to P_3$

mit $B = (1, x, x^2, x^3)$:

$${}_B T_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad {}_B S_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Offenbar $T^2 = S$ und tatsächlich auch

$$({}_B T_B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}_B S_B \quad \checkmark$$

Beweis von (IV):

$$_D(TS)_B \overset{!}{=} {_DT_C}\,{_CS_B}$$

Verkettung

Matrixmultiplikation

$T \in \mathcal{L}(W, U)$

$S \in \mathcal{L}(V, W)$

${_DT_C} \in \mathcal{M}(k, m)$

${_CS_B} \in \mathcal{M}(m, n)$

$B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V

$C = (c_1, \dots, c_m)$ Basis von W

$D = (d_1, \dots, d_k)$ Basis von U

folgende lineare Bijektionen ersparen hässliche Rechnungen:

$$\phi_B : V \longleftrightarrow \mathbb{K}^n \qquad \text{(Komponenten-abbildung)}$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i \quad \begin{array}{c}\longmapsto \\ \longleftarrow\!\!\dashv\end{array} \quad {}_B v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

analog: $\phi_C : W \longleftrightarrow \mathbb{K}^m$, $\quad \phi_D : U \longleftrightarrow \mathbb{K}^k$,

ferner identifizieren wir $M(m,n)$ mit $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ gemäß

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \ni \boxed{A \equiv {}_{B_m}A_{B_n}} \in M(m,n)$$

B_m, B_n Standardbasis von $\mathbb{K}^m$ bzw. $\mathbb{K}^n$

für $u \in V$ sei $w = Sv$ und $u = TSv = Tw$;

$$\longrightarrow \quad {}_C w = \phi_C w = \phi_C S v = \underbrace{\phi_C S \phi_B^{-1}}\overbrace{}^{\mathbb{1}} \underbrace{\phi_B v}_{= {}_B v} \overset{!}{=} \underbrace{{}_C S_B}\, {}_B v$$

d.h. $\boxed{{}_C S_B = \phi_C S \phi_B^{-1}}$

ebenso:

- $${}_D T_C = \phi_D T \phi_C^{-1}$$

- $${}_D(TS)_B = \phi_D T S \phi_B^{-1} = \underbrace{\phi_D T \phi_C^{-1}}_{= {}_D T_C} \underbrace{\phi_C S \phi_B^{-1}}_{= {}_C S_B}$$

$\checkmark$