Matrixinversion mittels Gauß-Verfahren

benötigt elementare Zeilenumformungen (Spaltenumformungen) einer Matrix:

(Z1) Multiplikation der i-ten Zeile mit λ

(Z2) Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile

(Z3) Vertauschung von i-ter und j-ter Zeile

(alternativ können elementare Spaltenumformungen verwendet werden:

(S1) Multiplikation der i-ten Spalte mit λ

(S2) Addition des λ-fachen der j-ten Spalte zur i-ten Spalte

(S3) Vertauschung von i-ter und j-ter Spalte)

Gaußverfahren: Forme zu invertierende Matrix A mittels elementaren Zeilenumformungen (alt.: Spaltenumformungen) zur Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n$ um; dieselben Umformungen in gleicher Reihenfolge an $\mathbb{1}_n$ (statt A) ausgeführt ergibt inverse Matrix A^{-1}.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Big| \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Big| \qquad \xrightarrow{Z2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Big| \qquad \xrightarrow{Z2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Big| \qquad \xrightarrow{Z1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} A^{-1}$$

Test:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Warum funktioniert's?

Zeilenumformungen (Z1–3) können durch (links-) Multiplikation mit invertierbaren Matrizen dargestellt werden:

$$A \xrightarrow{Z1,i,\lambda} A' = S_i(\lambda)\,A \quad \text{mit} \quad S_i(\lambda) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$A \xrightarrow{Z2,i,j,\lambda} A' = Q_i^j(\lambda)\,A \quad \text{mit} \quad Q_i^j(\lambda) = \mathbb{1}_n + \lambda E_{ij}$$

$$A \xrightarrow{Z3,i,j} A' = P_i^j\,A \quad \text{mit} \quad P_i^j = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & 1 & & & 0 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad\qquad i \qquad\quad j & \end{array}$$

nach n geeigneten Umformungen $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \{S_i(\lambda), Q_i^{j'}(\lambda'), P_{i''}^{j''}\}$ erhalten wir (linke Seite)

$$A_n = U_n U_{n-1} \cdots U_2 U_1 A \overset{!}{=} \mathbb{1}_n$$

d.h. $\quad U_n U_{n-1} \cdots U_2 U_1 = A^{-1}$;

dieselben Umformungen angewandt auf $\mathbb{1}_n$ (rechte Seite) ergibt $\quad U_n U_{n-1} \cdots U_2 U_1 \mathbb{1}_n$, also genau A^{-1}.

<u>Hinweis</u>: wird das Gauß-Verfahren auf eine <u>nicht</u>-invertierbare Matrix angewandt, erscheint nach hinreichend vielen Umformungen eine 0-Zeile oder 0-Spalte.