
3. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2007/2008

Internetseite: <http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vorkurs07.html/>

1. Skalarprodukt

- Was ist ein Skalarprodukt und welche Eigenschaften besitzt es?
- Was ist ein euklidischer Vektorraum?
- Wie sind in einem euklidischen Vektorraum die Länge eines Vektor und die Orthogonalität zwischen zwei Vektoren definiert? Wie ist der Winkel zwischen zwei Vektoren definiert? Wie normiert man einen Vektor?

2. Komponenten

Gegeben sei eine Orthonormalbasis $B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ eines euklidischen Vektorraums V .

- Wie lauten die Basisvektoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ und \underline{e}_3 in Komponentendarstellung bezgl. B ?
- Zeigen Sie, dass die Komponenten eines Vektors $\underline{a} \in V$ bzgl. B durch $a_i = \langle \underline{e}_i, \underline{a} \rangle$ bestimmt sind ($i = 1, 2, 3$).

Eine zweite Basis $B' = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ sei gegeben durch

$$\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_2 + \underline{e}_3), \quad \underline{f}_2 = -\underline{e}_1, \quad \underline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\underline{e}_2 + \underline{e}_3).$$

- Wie lauten die neuen Basisvektoren $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ und \underline{f}_3 in Komponentendarstellung bezgl. der alten Basis B ?
- Zeigen Sie, dass B' eine Orthonormalbasis ist.
- Wie lautet die Komponentendarstellung des Vektors

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B$$

bezgl. der Orthonormalbasis B' ?

3. Dreiecksungleichung

Für Vektoren \underline{a} und \underline{b} eines euklidischen Vektorraums gilt die Dreiecksungleichung

$$|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|.$$

- Warum heißt diese Ungleichung Dreiecksungleichung?
- Wann gilt Gleichheit?
- Beweisen Sie die Ungleichung. (Hinweis: beide Seiten quadrieren.)