Fachgruppe Physik
der Universität zu Köln

J. Hemberger, R. Klesse

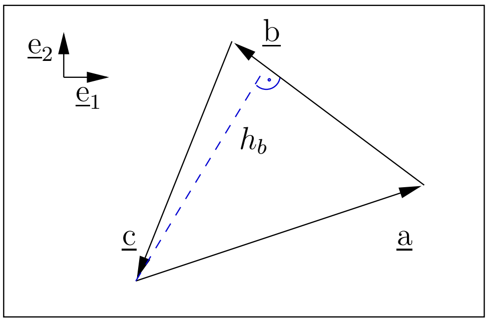
4. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2007/2008

Internetseite: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vorkurs07.html/*

1. Dreieck

Ein Dreieck sei durch zwei seiner Seitenvektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9/2 \end{pmatrix}_B$ gegeben, B ist die Orthonormalbasis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$.

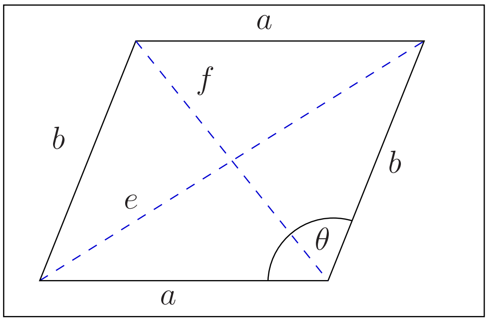


a) Wie lang sind die drei Seiten?

b) Wie groß sind die drei Winkel?

c) Wie lang ist die Höhe h_b?

2. Parallelogramm



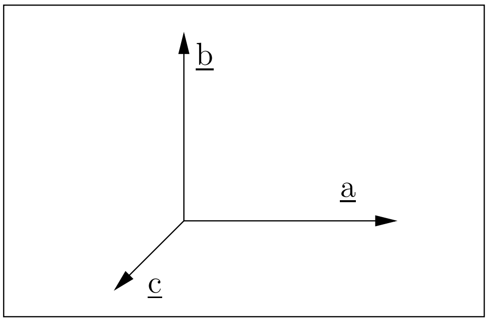
a) Zeigen Sie durch Vektorrechnung, dass in jedem Parallelogramm für die Seitenlängen a und b und die Diagonallängen e und f folgende Gleichung erfüllt ist:

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

b) In einem speziellen Parallelogramm sei $a = 2$, $b = 1$. Der Winkel zwischen den Seiten a und b sei $\theta = \frac{2\pi}{3}$ $(= 120°)$. Bestimmen Sie e und f.

3. Vektorprodukt

a) Gegeben seien drei Vektoren wie in der Zeichnung unten; $\underline{a}$ und $\underline{b}$ liegen in der Zeichenebene, $\underline{c}$ zeigt aus ihr heraus. Alle Winkel sind rechte, die Längen der drei Vektoren sind 1. Ermitteln Sie das Ergebnis der folgenden Vektorausdrücke:



i) $\underline{a} \times \underline{b}$ **ii)** $\underline{b} \times \underline{a}$ **iii)** $\underline{c} \times \underline{a}$

iv) $\underline{c} \times \underline{c}$ **v)** $\underline{c} \times (\underline{b} + \underline{a})$ **vi)** $(\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{c} + \underline{a})$

b) Gegeben seien

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad \text{und } \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

bezüglich einer rechtshändigen Orthonormalbasis B. Bestimmen Sie $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{b} \times \underline{a}$ und $\langle \underline{a}, \underline{a} \times \underline{b} \rangle$. Wie groß ist die Fläche eines von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannten Parallelogramms?

c) Zwei Vektoren der Längen 2 und 3 schließen den Winkel $\frac{\pi}{6}$ $(= 30°)$ ein. Wie lang ist ihr Vektorprodukt?

d) Beweisen oder widerlegen Sie: Für beliebige Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ gilt:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$$

4. Parallel- und Orthogonalkomponente

$\underline{a}$ und $\underline{b}$ seien Vektoren eines dreidimensionalen euklidischen Vektorraums. Die Parallelkomponente $\underline{b}_{\|}$ von $\underline{b}$ bzgl. $\underline{a}$ ist bekanntlich durch $\underline{b}_{\|} = \langle \underline{b}, \underline{\hat{a}} \rangle \, \underline{\hat{a}}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Orthogonalkomponente durch

$$\underline{b}_{\perp} = (\underline{\hat{a}} \times \underline{b}) \times \underline{\hat{a}}$$

gegeben ist.