Fachgruppe Physik
der Universität zu Köln

J. Hemberger, R. Klesse

5. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2007/2008

Internetseite: *http://www.thp.uni-koeln.de/˜rk/vorkurs07.html*

1. Parallelepiped

Ein Parallelepiped sei durch die drei Vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

gegeben (B Orthonormalbasis). Bestimmen Sie sein Volumen.

2. Abbildungsvorschriften

a) Sei V ein beliebiger euklidischer Vektorraum, $\underline{n}$ ein beliebiges, aber festes Element davon. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

i) $A : V \to \mathbb{R}, \quad \underline{a} \mapsto |\underline{a}|$

ii) $B : V \to \mathbb{R}, \quad \underline{a} \mapsto \langle \underline{a}, \underline{n} \rangle$

iii) $C : V \to V, \quad \underline{a} \mapsto \langle \underline{a}, \underline{n} \rangle \, \underline{n}$

iv) $D : V \to \mathbb{R}, \quad \underline{a} \mapsto 1$

v) $E : V \to V, \quad \underline{a} \mapsto \langle \underline{a}, \underline{n} \rangle \, \underline{a}$

vi) $F : V \to V, \quad \underline{a} \mapsto \underline{a} + 2 \langle \underline{a}, \underline{n} \rangle \, \underline{n}$

3. Lineare Abbildung

Gegeben sei ein Vektorraum V, aufgespannt durch die Basis $B_V = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$. Die lineare Abbildung $A : V \to V$ sei definiert durch die Bilder der Basisvektoren

$$A(\underline{e}_1) \ = \ 2\underline{e}_2 \qquad\qquad A(\underline{e}_2) \ = \ -3\underline{e}_1 + \underline{e}_2 \ .$$

a) Bestimmen Sie folgende Ausdrücke über die Linearität von A:

i) $A(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$ **ii)** $A(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$ **iii)** $A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{B_V}\right)$ **iv)** $A\left(A\left(\underline{e}_1 - \underline{e}_2\right)\right)$

b) Wie lauten die Matrixdarstellung von A bezüglich der angegebenen Basis?

c) Wiederholen Sie Teil **a)** und verwenden Sie diesmal Matrix-Vektor-Multiplikationen.

4. Verkettung

Zusätzlich zu den Objekten der letzten Aufgabe kommt nun noch ein Vektorraum W mit Basis $B_W = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ und eine lineare Abbildung $B : V \to W$ hinzu; B ist definiert durch

$$B(\underline{e}_1) \quad = \quad \underline{f}_1 + \underline{f}_2 \qquad\qquad B(\underline{e}_2) \quad = \quad \underline{f}_3 - \underline{f}_1 \; .$$

a) Was ist die Matrixdarstellung von B in den angegebenen Basen?

b) Welche der folgenden Verkettungen sind erlaubt? Wenn ja, was ist ihre Matrixdarstellung?

i) $A \circ A$ **ii)** $B \circ B$ **iii)** $A \circ B$ **iv)** $B \circ A$

5. Mehr Abbildungsvorschriften

a) Sei $\underline{n}$ ein normierter Vektor und $\underline{a}$ ein beliebiger Vektor, beide in einem dreidimensionalen euklidischen Vektorraum. Interpretieren Sie die die folgenden Abbildungen als Spiegelungen, Projektionen oder Drehungen (Etwa: "Drehung um die durch $\underline{n}$ gegebene Achse um 45°").
Falls Sie Schwierigkeiten haben: Bearbeiten Sie erst **b)** und verwenden Sie die Ergebnisse.

i) $\underline{a} \mapsto -\underline{a}$ **ii)** $\underline{a} \mapsto \langle \underline{a}, \underline{n} \rangle \, \underline{n}$
iii) $\underline{a} \mapsto \underline{a} - \langle \underline{a}, \underline{n} \rangle \, \underline{n}$ **iv)** $\underline{a} \mapsto \underline{a} - 2 \, \langle \underline{a}, \underline{n} \rangle \, \underline{n}$
v) $\underline{a} \mapsto 2 \, \langle \underline{a}, \underline{n} \rangle \, \underline{n} - \underline{a}$ **vi)** $\underline{a} \mapsto \underline{n} \times \underline{a} + \langle \underline{a}, \underline{n} \rangle \, \underline{n}$ (für Experten)

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen der Abbildungen aus **a)** bezüglich einer Orthonormalbasis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ für $\underline{n} = \underline{e}_1$.