

Übungsaufgaben für den Vorkurs, Teil 2 , Oktober 2015

T. Nattermann

1. Grenzwerte

Berechnen Sie die folgende Grenzwerte!

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2+2x-35}{x^2-8x+15}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x+4}{2x^2+x+5}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m+b}{cx^n+d}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

5. * $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1+x}{x}}$

6. * $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

7. * $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$

Zeigen Sie die folgende Relationen!

1. * $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x!}{x^x} = 0$

2. * $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$

2. Stetigkeit

Welchen Grenzwerten nähern sich die folgenden Funktionen für $x \rightarrow +0$ und $x \rightarrow -0$ an? Sind diese Funktionen bei $x = 0$ stetig? (graphische Darstellung)

1. $f(x) = |x|$

2. $f(x) = \frac{x}{|x|}$

3. Die Funktion $f(x, y) = \frac{4xy}{4x^2+y^2}$ ist an der Stelle $x = 0, y = 0$ nicht definiert. Deshalb definieren wir zusätzlich $f(x = 0, y = 0) = 0$. Ist die Funktion damit zu einer im Punkt $(x = 0, y = 0)$ stetigen Funktion ergänzt worden?

3. Umkehrfunktion

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{1}{x-1}$ zeichnerisch! Wie lautet die Umkehrfunktion explizit?

In welchen Definitions- und Wertebereichen ist die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ umkehrbar und wie lautet dort die Umkehrfunktion? Hierbei seien $a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c \in \mathbb{R}$.

4. Potenzfunktionen

Zeigen Sie, ausgehend von

$$x^A x^B = x^{A+B}, \quad \left(x^A\right)^B = x^{A \cdot B} \quad \text{und} \quad x^0 = 1$$

(wobei $x \in \mathbb{R}^+$ und $A, B \in \mathbb{R}$), dass gilt:

$$x^{-A} = \frac{1}{x^A}$$

5. Polynomdivision

Berechnen Sie durch Polynomdivision:

1. $(x^2 - 1) : (x - 1)$
2. $(x^3 - 1) : (x - 1)$
3. $(x^4 - 1) : (x - 1)!$
4. Wie lautet für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ das Ergebnis der Polynomdivision von

$$\frac{x^{N+1} - 1}{x - 1}?$$

6. Partialbruchzerlegung

Zerlegen Sie die folgenden Brüche in Partialbrüche!

1. $\frac{4x + 11}{(x - 4)(x + 2)(x + 5)}$
2. $\frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^3}$
3. $\frac{x^2 + 6}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$

7. Gebrochen-rationale Funktionen

Berechnen Sie den Definitionsbereich sowie die Null- und Polstellen folgender gebrochen-rationaler Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

und fertigen Sie vom Graphen eine qualitative Skizze an!

Führen Sie zu folgender Funktion eine Partialbruchzerlegung durch

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$$

8. Komplexe Zahlen

Wie lauten der Realteil $\Re(z)$ und der Imaginärteil $\Im(z)$ der folgenden komplexen Zahlen?

1. $3 + 5i$
2. $\frac{6+9i}{12}$
3. $(4 + 2i) \cdot (3 - i)$
4. $(3 + 2i)^2$
5. $(2 + 2i)^2 + (2 - 2i)^2$
6. $\frac{3}{4+6i}$

Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z allgemein wie folgt erhalten werden können:

$$\Re(z) = \frac{z + z^*}{2} \quad \Im(z) = \frac{z - z^*}{2i}$$

Nun betrachten wir zwei komplexe Zahlen $z_k = x_k + iy_k$ mit $k = 1, 2$. Zeigen Sie, dass gilt:

1. $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$
2. $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Eine komplexe Zahl z kann sowohl in kartesischer Form mit $z = x + iy$ als auch in Polarform mit $z = re^{i\phi}$ dargestellt werden. Zeigen Sie, dass für die Umrechnung von kartesischer Form in Polarform gilt (falls $x > 0$):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Wie lautet die Umrechnung von Polarform in kartesische Form?

Berechnen Sie:

1. $\sqrt{-4}$
2. $\sqrt{3+4i}$
3. $\sqrt[5]{-1}$

9. Rechenregeln für Logarithmen

Zeigen Sie die folgenden Gleichungen unter Verwendung der bekannten Rechenregeln für die Exponentialfunktion $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ bzw. $(e^n)^m = e^{n \cdot m}$

1. $\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$
2. $\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$,
3. $\ln(A^n) = n \cdot \ln(A)$

Zeigen Sie, dass ein Basiswechsel mit folgender Gleichung durchgeführt werden kann:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

10. Trigonometrische Funktionen

Zeigen Sie ausgehend von den Definitionen der trigonometrischen Funktionen und deren Exponentialdarstellungen $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ dass gilt:

1. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
2. $\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$
3. $\sin^2(x) = \frac{1}{1 + \cot^2(x)}$

Zeigen Sie mit Hilfe der Exponentialdarstellungen von Sinus und Kosinus und den bereits bekannten Relationen die folgenden Additionstheoreme:

1. $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
2. $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
3. $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$
4. $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$
5. $\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

11. Hyperbolische Funktionen

Analog zu der Exponentialdarstellung der trigonometrischen Funktionen lassen sich die sogenannten hyperbolischen Funktionen definieren als

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen die folgenden Beziehungen:

1. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ und $\cosh(-x) = \cosh(x)$
2. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
3. $\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) \pm \sinh(y) \cdot \cosh(x)$
4. $\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) \pm \sinh(x) \cdot \sinh(y)$

12. Hyperbolische Umkehrfunktion

Zeigen Sie ausgehend von den Definitionen der elementaren Funktionen

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

13. Vollständige Induktion

Machen Sie sich mit der Beweismethode der vollständigen Induktion vertraut. Klären Sie dazu die Bedeutung der Begriffe *Induktionsanfang*, *Induktionsvoraussetzung* und *Induktionsschritt* und vollziehen Sie die der Beweismethode zu Grunde liegende Logik nach.

Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ durch vollständige Induktion.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ gilt: n^2 ist gleich der Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen.

Hinweis: Finden Sie zunächst einen mathematischen Ausdruck, der den zu Beweisenden Sachverhalt beschreibt und wenden Sie auf diesen das bekannte Schema der vollständigen Induktion an.

14. Ableitungen elementarer Funktionen

Berechnen Sie die Ableitungen nach x der folgenden Funktionen:

1. $x^2 \ln(x)$
2. $\frac{x^2 + 3}{x - 5}$
3. $\sqrt{x} + \sqrt[n]{x}$
4. $\sqrt{3x^2 + 2x - 1}$
5. $\sin(x) \cos(x)$
6. $e^{x \sin(x)}$
7. a^x
8. $\cosh(x)$

15. Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f(x) \equiv y$ eine Funktion mit dazugehöriger Umkehrfunktion $\bar{f}$, sodass $\bar{f}(f(x)) = x$. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:

$$\bar{f}'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\bar{f}(y))} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}$$

Berechnen Sie mit dieser Formel die Ableitung von

1. $\bar{f}(x) = \ln(x)$
2. $\bar{f}(x) = \arctan(x)$
3. $\bar{f}(x) = \operatorname{arsinh}(x)$

Hinweis: Vereinfachen Sie die Resultate von 2 und 3 soweit, dass keine trigonometrischen oder hyperbolischen Funktionen mehr enthalten sind.

16. Ableitungen - Teil 2

Berechnen Sie die Ableitungen nach x der folgenden Funktionen:

1. $x^2 + 6x + 9$
2. $x^n - x^{-m}$
3. $(x^2 + 5x)(x^2 - 5x)$
4. $2x^3 e^x$,
5. $\ln(x) \cos(x)$
6. $\frac{3x^4 + 5x^2}{7x - 1}$,
7. $\frac{e^x - e^{-x}}{2x}$,

8. $\frac{\tan(x)}{\ln(x)}$
9. $\sqrt{3x^3 - 4x + 1}$,
10. $\sin(\cos(x))$
11. $e^{-x^2} \ln(\sin(x))$
12. $\cot(x)$
13. $\coth(x)$
14. $\arccos(x)$

17. Potenzreihenentwicklung

Führen Sie eine Potenzreihenentwicklung um x_0 (also $f(x) \simeq f(x_0) + \dots$) für $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ bis zur 5. Ordnung durch.

Wie lauten die Ergebnisse der Potenzreihenentwicklungen im Limes $x_0 \rightarrow 0$?

18. Ableitungen von Funktionen mehrerer Variablen

Gegeben seien die Funktionen $f(x, y) = x^2 e^y$, und $f(x, y) = \frac{4xy}{4x^2 + y^2}$. Berechnen Sie jeweils die folgenden Ableitungen

1. $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$
2. $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$
3. $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$
4. $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

Gegeben sei $f(x, y, z) = x^2 y \ln(z) + \sqrt{x} \sin(y) + \frac{e^z}{x}$. Berechnen Sie:

1. $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$
2. $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)$
3. $\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)$
4. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$
5. $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)$
6. $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)$

19. Integrale

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

1. $\int dx(3x^2 - 4x + 2)$,
2. $\int dx(5x^3 - 2x^2 - 6)$,
3. $\int dx(4x^3 + 2x^{\frac{3}{2}} + 1)$
4. $\int dx(4x^4 - 2x^2 + x^{\frac{1}{2}})$,

$$5. \int dx \frac{1}{x+2},$$

$$6. \int dx x e^{(x^2)}$$

$$7. \int x \arccos(x)^1$$

$$8. \int dx \tan(x)$$

$$9. \int dx x \cos(x),$$

$$10. \int dx x \cos(x^2),$$

$$11. \int dx x \cos(x^2 + 1)$$

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$1. \int_{-2}^2 dx (3x^4 + 2x^2 - 7),$$

$$2. \int_{-2}^2 dx (-5x^5 + 4x^3 - 3x),$$

$$3. \int_{-2}^2 dx [(2x^3 + x)(-5x^2 + 2)]$$

$$4. \int_0^y dx x e^x,$$

$$5. \int_1^2 dx x \ln(x),$$

$$6. \int_{-\pi}^z dx \sin(x) \cos(x)$$

20. Dimensionsanalyse

Der Betrag der Kraft des Luftwiderstandes F_L ist abhängig von der Querschnittsfläche A des Krpers auf den sie wirkt, seiner Geschwindigkeit v und von der Dichte der Luft ρ .

Welche Dimension in SI-Einheiten besitzen die einzelnen physikalischen Gren?

Ermitteln Sie durch eine Dimensionsanalyse wie sich der Betrag der Kraft des Luftwiderstandes (bis auf einen numerischen Faktor) aus den Gren A , v und ρ berechnen lässt.

¹Berechnen Sie als Nebenrechnung $\frac{x}{\arccos}(x)$ und formen Sie das Resultat um, bis keine trigonometrischen Funktionen mehr darin enthalten sind.