1. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2015/16

Internetseite: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/vorkurs2015.html/*

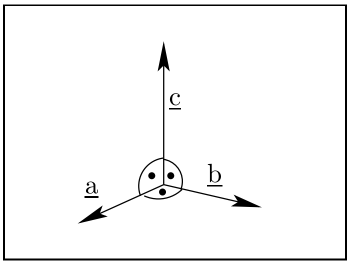
Gruppeneinteilung:

4. Vektorraum

Was ist ein (reeller) Vektorraum?

5. Vektoraddition und Skalarmultiplikation

$\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ bezeichnen Translationen im Raum um jeweils die gleiche Länge, aber in drei zueinander orthogonalen Richtungen (vgl. Skizze). P sei ein fest gewählter Punkt im Raum. Betrachten Sie die Punktmengen, die unter den jeweils angegebenen Translationen aus P hervorgehen. Beschreiben Sie die geometrischen Objekte, die jeweils durch diese Punktmengen gebildet werden.



a) $\{\lambda\underline{b} : \lambda \in \mathbb{R}\}$

b) $\{\underline{b} + \lambda\underline{a} : \lambda \in [0,1]\}$

c) $\{\lambda(\underline{b} + \underline{c}) : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$

d) $\{\lambda\underline{b} + \mu\underline{c} : \lambda, \mu \in [0,1]\}$

e) $\{n\underline{a} + \lambda\underline{b} + \mu\underline{c} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{Z}\}$

f) $\{\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} + \nu\underline{c} : \lambda, \mu, \nu \in [0,1]\}$

g) $\{l\underline{a} + m\underline{b} + n\underline{c} : l, m, n \in \mathbb{Z}\}$

h) $\{m\underline{a} + n\underline{b} + \lambda\underline{c} : m, n \in \mathbb{Z},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

6. Umformungen

Vereinfachen Sie die folgenden Vektorausdrücke ($\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ sind Vektoren, λ ist ein von 0 verschiedener Skalar.) :

$$\begin{array}{lll}
\underline{a} + \underline{a} + \underline{a} & \underline{a} - 2\,\underline{a} & 3\,\underline{a} + \underline{b} - \underline{a} \\
\underline{a} + 2(\underline{b} - \underline{a}) & \underline{c} - (\underline{b} - \underline{a}) & \underline{b} - \frac{1}{2}(\underline{b} - 2\,\underline{a}) \\
\lambda\,\underline{a} - 2\lambda\,\underline{b} & \underline{a} - \frac{2}{\lambda}(\lambda\,\underline{a} + \lambda\,\underline{b}) & \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\underline{a} + \underline{b}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\underline{a} - \underline{b})
\end{array}$$

7. Lösungen einer linearen Gleichung

a) Zeigen Sie, dass die Menge L der reellen Zweitupel $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

$(a_1, a_2 \in \mathbb{R})$ bzgl. der Addition $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ und der Skalarmultiplikation $\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$ einen Vektorraum bilden.

b) Nun sei $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$$

und $\underline{y} = (y_1, y_2)$ ein Element aus L. Zeigen Sie, dass dann $\underline{x} + \underline{y}$ ebenfalls eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

c) Veranschaulichen Sie die allgemeinen Aussagen aus a) und b) für den Fall $a_1 = 1, a_2 = 2$ und $b = 3$ anhand einer graphischen Darstellung der Lösungen von $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ und $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$.