3. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2015/16

Internetseite: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vorkurs2015.html/*

Gruppeneinteilung:

13. Parallel- und Orthogonalkomponente

B sei eine Orthonormalbasis eines dreidimensionalen euklidischen Vektorraums. Der Vektor $\underline{a}$ sei gegeben durch

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}_B .$$

Bestimmen Sie für die Vektoren

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}_B , \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

jeweils die Parallel- und Orthogonalkomponente bzgl. Vecktor $\underline{a}$.

14. Kosinussatz

a) Was besagt der Kosinussatz?

b) Beweisen Sie den Kosisunssatz mittels Vektorrechnung.

15. Satz des Thales

a) Wie lautet der Satz des Thales?

b) Beweisen Sie den Satz des Thales mittels Vektorrechnung.

16. Orthonormalbasen

a) $B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ sei eine Orthonormalbasis eines vierdimensionalen euklidischen Vektorraums V. Eine weitere Basis B' von V sei durch die Vektoren

$$\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_3), \quad \underline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_2 + \underline{e}_4), \qquad \underline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 - \underline{e}_3), \quad \underline{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_2 - \underline{e}_4),$$

gegeben. Handelt es sich bei B' um eine Orthonormalbasis von V?

b) Zeigen Sie, dass die Komponenten $a_1, \ldots, a_n$ eines Vektors $\underline{a}$ bzgl. einer ONB $B = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ eines euklidischen Vektorraums durch

$$a_i = < \underline{e}_i, \underline{a} >$$

gegeben sind und damit

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^{n} < \underline{e}_i, \underline{a} > \underline{e}_i$$

gilt.

c) Wir betrachten wieder den Vektorraum V aus a) mit den Basen B und B'. Stellen Sie den Vektor

$$\underline{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_B$$

in Komponenten bzgl. der Basis B' und den Vektor

$$\underline{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{B'}$$

in Komponenten bzgl. der Basis B dar.