Vorkurs Physik

Zweck: Angleichung mit Auffrischung der mathematischen Schulkenntnisse!

Teil 1: (21. – 29.9.) **Lineare Algebra:** Vektoren, analytische Geometrie, lineare Abbildung, Matrizen

Teil 2: (1. – 9.10.) **Analysis:** Funktionen, Ableitung, Integral, Grenzwert, Folgen, ...

Lineare Algebra: Vektoren

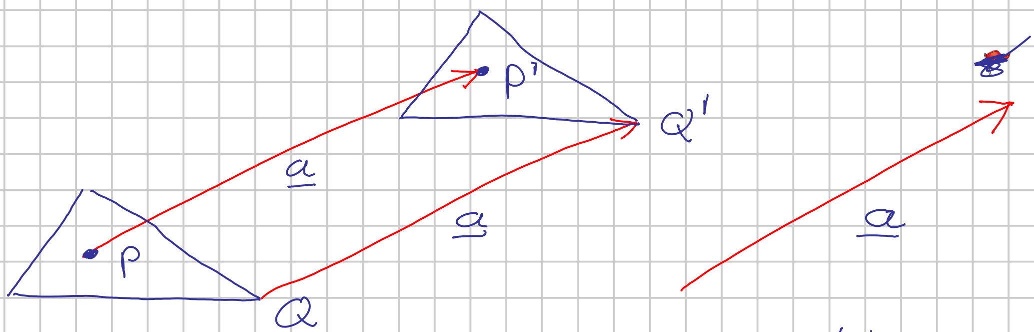
Vektor: mathematisches Objekt, geeignet u.A. zur Beschreibung einer physikalischen Größe mit Richtung und Betrag; wie etwa Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft

(Vektoren ebenso geeignet zur Beschreibung von Schwingungsmoden (→ Mechanik), Zuständen eines Atoms (→ Quantenmechanik), elektromagnetischen Wellen etc.)

Hilfreich: charakteristischen Eigenschaften (reellen) euklidischen Vektoren und deren Verknüpfungen (etwa Addition, Skalarmultiplikation) sind genau die Eigenschaften von räumlichen Parallelverschiebungen

≡ Translationen

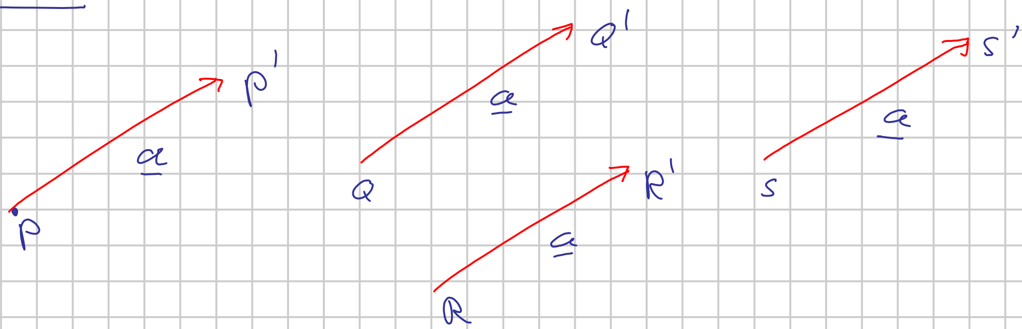
→ **Translation als Prototyp des Vektors**



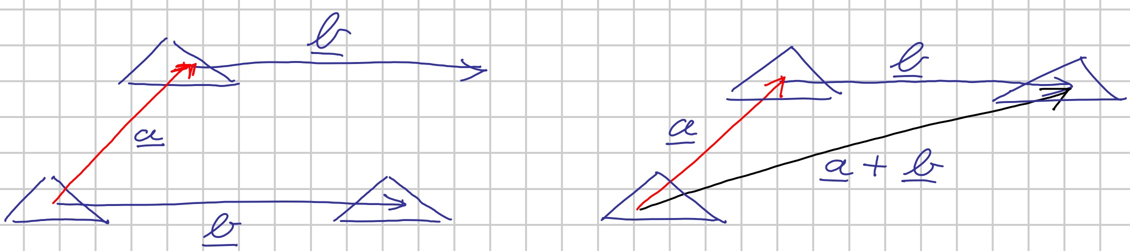
(Translations-) Vektor $\underline{a} \equiv \overrightarrow{PP'}$

(mit **Betrag** $|\underline{a}|$ = Länge der Strecke $\overline{PP'}$
Richtung $\hat{\underline{a}}$ = „von P nach P'")

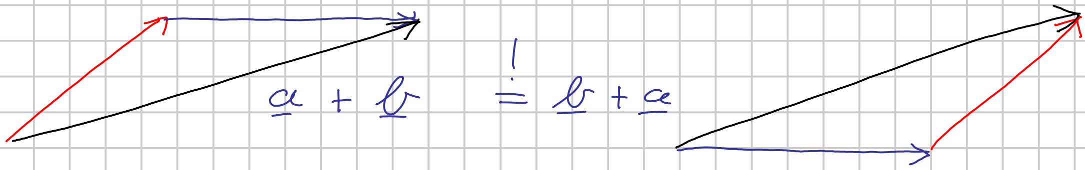
beachte: $\underline{a} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \ldots$



Vektoraddition $\hat{=}$ **Hintereinanderausführung** von Translationen



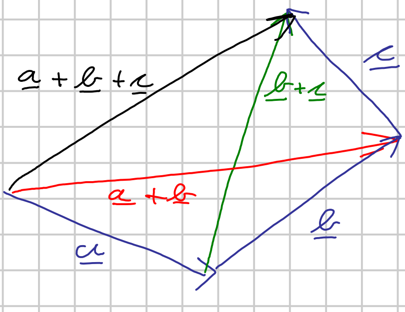
... ist **kommutativ**:



$$\underline{a} + \underline{b} \overset{!}{=} \underline{b} + \underline{a}$$

... ist **assoziativ**

$$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} \overset{!}{=} \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$$

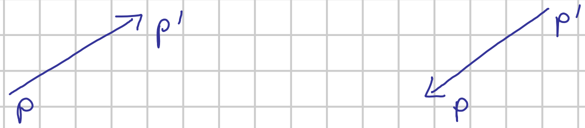


Null-Vektor $\underline{0}$ $\hat{=}$ „Translation" um Strecke 0 : $\underline{0} = \overrightarrow{PP}$;

offenbar gilt für bel. Vektor $\underline{a}$: $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$

inversen Vektor

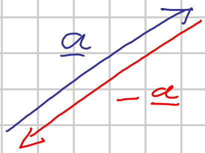
Translation $\overrightarrow{PP'}$ kann durch $\overrightarrow{P'P}$ rückgängig



gemacht werden; ist $\underline{a} = \overrightarrow{PP'}$, so nennen wir $\overrightarrow{P'P}$ den inversen Vektor zu $\underline{a}$ und bezeichnen ihn mit „$-\underline{a}$";

d.h.

$$\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0};$$



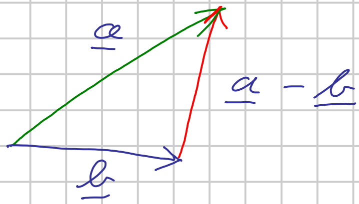
definitorisches „="

→ Vektorsubtraktion: $\underline{a} - \underline{b} := \underline{a} + (-\underline{b})$

geometrische Bed.: $\underline{c} = \underline{a} - \underline{b}$ erfüllt

$$\underline{b} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + \underbrace{\underline{b} + (-\underline{b})}_{=\underline{0}} = \underline{a}$$

d.h.



Zusammengefasst: Vektoraddition „+"

a1: kommutativ: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

a2: assoziativ: $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$

a3: Nullvektor $\underline{0}$ erfüllt $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$ für bel. $\underline{a}$

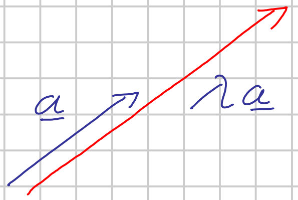
a4: jeder Vektor $\underline{a}$ besitzt einen inversen Vekt. $-\underline{a}$ so, dass $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$.

[Mathematiker sagen dafür kurz: „Vektoren bilden bzgl. Vektoraddition eine kommutative Gruppe" (auch: „abelsche Gruppe")]

Skalarmultiplikation

eines Vektors $\underline{a}$ mit Skalar (= reeller Zahl) λ

$\hat{=}$ Streckung / Stauchung um Faktor λ:



$\longrightarrow$ geometrisch motivierte definierende Eigenschaften:

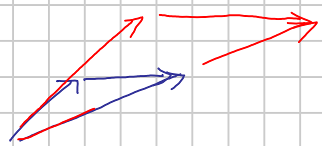
S1) $\lambda \underline{a} + \lambda \underline{b} = \lambda(\underline{a} + \underline{b})$

S2) $\lambda \underline{a} + \mu \underline{a} = (\lambda + \mu)\underline{a}$

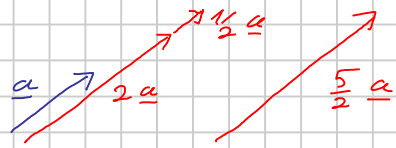
S3) $\lambda(\mu \underline{a}) = (\lambda\mu)\underline{a}$

S4) $1\underline{a} = \underline{a}$

⌈ zu 1)



zu 2)



... ⌋

es folgen weitere Eigenschaften

$0\underline{a} = \underline{0}$ ⌈ denn $\underline{a} \overset{4)}{=} 1\underline{a} = (1+0)\underline{a} \overset{2),4)}{=} \underline{a} + 0\underline{a} \quad | -\underline{a}$

$\underline{0} = 0\underline{a}$ ✓ ⌋

$(-1)\underline{a} = -\underline{a}$ ⌈ denn $\underline{a} + (-1)\underline{a} \overset{4),2)}{=} (1-1)\underline{a} = 0\underline{a} = \underline{0}$ ✓ ⌋

Für negative λ gilt demnach:

$$\lambda \underline{a} = ((-1)|\lambda|)\underline{a} \overset{3)}{=} |\lambda|(-\underline{a})$$

Vektorraum = Menge V mit Vektoraddition (a1 – a4) und Skalarmultiplikation (S1 – S4)

Vektor $\equiv$ Element von V

- Vektoraddition und Skalarmultiplikation sind einerseits geometrisch motiviert (Translationen!) und andererseits definierende Eigenschaften allgemeiner Vektoren

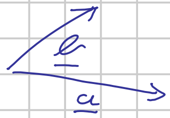
$\longrightarrow$ allgemeine Vektoren können im gewissen Sinne geometrisch interpretiert werden!

- $a1 - a4$ und $s1 - s4$ stellen allg. Rechenregeln für Vektoren dar

⟶ bequeme formale Umformungen vektorieller Gleichungen (insbesondere geometrischer Vektoren)

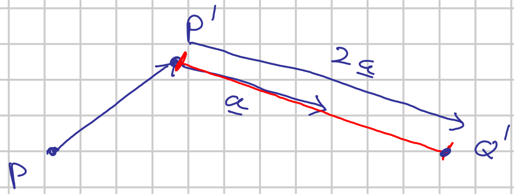
Beispiele

1) Translationen



, Menge $M = \{\underline{b} + \lambda \underline{a} \mid \lambda \in [0,2]\}$

Welche Punktmenge erhalten wir durch Translationen eines Punktes P mit allen Elementen aus M?



Strecke $\overline{P'Q'}$ wobei $\underline{b} = \overrightarrow{PP'}$ und $2\underline{a} = \overrightarrow{P'Q'}$

...

2) Umformungen: $3\underline{a} - \frac{1}{2}(2\underline{b} - 4\underline{a}) = \dots$

3) mit $\underline{a}$, $\underline{b}$ wie unter 1) sei $\underline{c} = \overrightarrow{PQ'} = \underline{b} + 2\underline{a}$;
Translationen von P unter $M_2 = \{\underline{c} + \mu \underline{a} \mid \mu \in [-2,0]\}$ ergibt dieselbe Strecke $\overline{P'Q'}$, da

$$\underline{c} + \mu \underline{a} = \underline{b} + 2\underline{a} + \mu \underline{a} = \underline{b} + \underbrace{(2+\mu)}_{=\lambda \in [0,2]} \underline{a} .$$