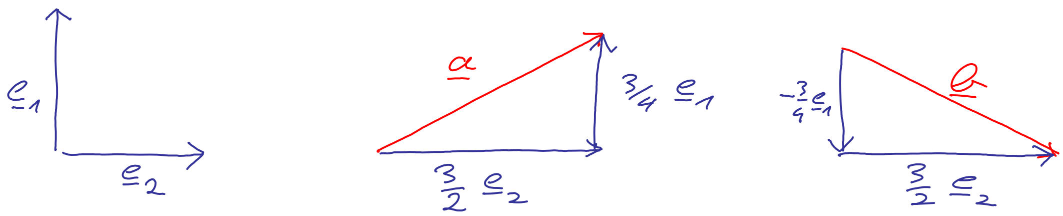
Basis eines Vektorraums, Dimension, Komponentendarstellung

am Beispiel ebener Translationen:

wähle zwei Referenztranslationen $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ („Basis")



d.h. $\underline{a} = 3/4\,\underline{e}_1 + 3/2\,\underline{e}_2$; $\underline{b} = -3/4\,\underline{e}_1 + 3/2\,\underline{e}_2$, (1)

Darstellung von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ bzg. Basis $B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$

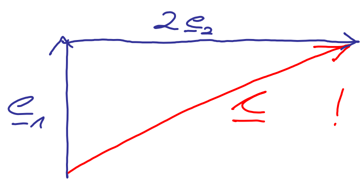
Notation: statt (1) kurz

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}_B , \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}_B$$

Komponentendarstellung bzg Basis B

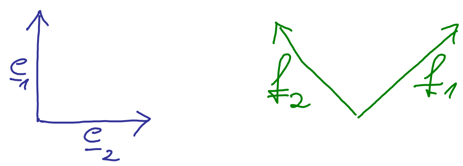
Komponenten von $\underline{b}$ bzgl. B,

etwa: $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B \overset{!}{=} 1\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$:



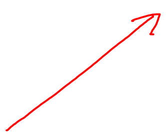
Vorsicht: Komponenten eines Vektors hängen immer von der gewählten Basis ab!

Beispiel:



$B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$

$B' = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$



$$\underline{c} = 1\,\underline{e}_1 + 3/2\,\underline{e}_2 = 1.2\,\underline{f}_1 + 0\,\underline{f}_2$$

also $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$!

allg. Definition:

Vektoren $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ bilden Basis eines VRs V wenn sich jeder Vektor $\underline{a} \in V$ durch eindeutig bestimmte $a_1, \dots, a_n$ gemäß

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + \dots + a_n \underline{e}_n =: \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \underline{e}_\ell$$

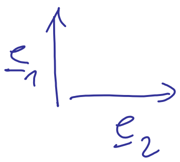
darstellen lässt.

$a_1, \dots, a_n$ sind die Komponenten von $\underline{a}$ bzg. Basis $B = \{ \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \}$.

Komponentenschreibweise: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$

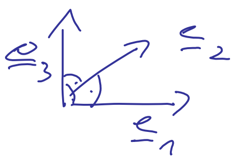
Anzahl der Basisvektoren ist die Dimension des Vektorraums ($\dim V$)

Bsp: 1) Vektorraum der ebenen Translationen



Basis $B = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2 \} \to$ Dimension 2

2) räumliche Translationen, Basis $B = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \}$



$\to$ Dimension 3

wenn Basis klar, oft einfach nur $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$!

Rechnen in Komponenten

zB $B = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \}$ Basis eines 3D VR:

Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_B$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_B$

(d.h. $\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + \dots$, $\underline{b} = b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 + \dots$)

Vektoraddition:

$$\underline{a} + \underline{b} = \dots = (a_1 + b_1) \underline{e}_1 + \dots = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}_B \quad !$$

„Vektoren werden komponentenweise addiert"

Skalarmultiplikation

$$\lambda \underline{a} = \lambda(a_1 \underline{e}_1 + \dots) = \lambda a_1 \underline{e}_1 + \lambda a_2 \underline{e}_2 + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}_B$$

Skalarprodukt

Für einige Arten von Vektoren sind geometrische Begriffe wie etwa

Länge (Betrag) eines Vektors,
Orthogonalität zweier Vektoren,
Winkel zwischen zwei Vektoren

erklärt $\longrightarrow$ euklidische Geometrie

um diese zu erfassen benötigt Vektorraum eine zusätzliche „Struktur“:

Skalarprodukt:

$$V \ni \underline{a}, \underline{b} \longmapsto \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle \in \mathbb{R}$$

oft auch mit $\underline{a} \cdot \underline{b}$, $\underline{a}\,\underline{b}$ bezeichnet

mit definierenden Eigenschaften

1) $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle$ (Symmetrie)

2) $\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle \geq 0$ (Positivität)
$= 0$ g.d.w. $\underline{a} = 0$

3) $\langle \lambda \underline{a}, \underline{b} \rangle = \lambda \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ (Linearität)
$\langle \underline{a} + \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle + \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle$

ermöglicht Definitionen von

Länge (Betrag, Norm) eines Vektors $\underline{a}$:

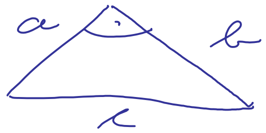
$$|\underline{a}| := \sqrt{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle}$$

Orthogonalität: $\underline{a} \perp \underline{b}$ genau dann wenn $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 0$

($\longrightarrow$ Winkel zwischen Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$, s.u.)

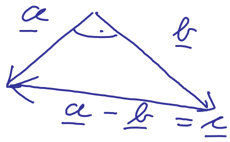
mittels derartig eingeführter Begriffe von Länge und Orthogonalität erhalten wir euklidische Geometrie! (*)

Beispiel: Satz des Pythagoras:



$$a^2 + b^2 = c^2 \quad ($$

Beweis mittels Vektorrechnung, Skalarprodukt:



wegen Orthogonalität von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ist $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 0$,

dann $$c^2 = |\underline{c}|^2 = |\underline{a} - \underline{b}|^2 = \langle \underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \underline{b} \rangle$$

$$= \underbrace{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle}_{= a^2} + \underbrace{\langle \underline{b}, \underline{b} \rangle}_{= b^2} - \underbrace{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}_{= 0} - \underbrace{\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle}_{= 0} = a^2 + b^2 \quad \blacksquare$$

(*) einen Vektorraum mit Skalarprodukt nennen wir deshalb einen euklidischen Vektorraum

Orthonormalbasis (ONB) eines euklidischen Vektorraums:

Basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ eines eukl. VR. ist orthonormal g.d.w. alle Basisvektoren von Norm 1 und paarweise orthogonal; d.h. genau

$$\langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle = \begin{cases} 0 : i \neq j \\ 1 : i = j \end{cases}$$

Skalarprodukt kann bequem in Komponenten bzgl. einer ONB B bestimmt werden:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_B$$

$$\rightarrow \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{l=1}^{n} a_l b_l . \qquad (\dots)$$

insbes. $$|\underline{a}| = \sqrt{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_l a_l^2}$$