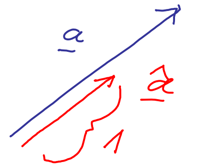
Richtungsvektor ("Richtung") eines Vektors $\underline{a}$:

$$\underline{\hat{a}} := \frac{1}{|\underline{a}|}\,\underline{a}$$



damit $|\underline{\hat{a}}| = 1$ und natürlich $\underline{a} = |\underline{a}|\,\underline{\hat{a}}$

(auf 1 normierte Vektoren heißen auch **Einheitsvektoren**)

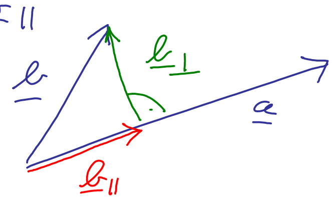
Parallel- und Orthogonalkomponente

eines Vektors $\underline{b}$ bezgl. Vektor $\underline{a}$: $\underline{b} = \underline{b}_{\parallel} + \underline{b}_{\perp}$

mit $\quad \underline{b}_{\parallel} := \langle \underline{b}, \underline{\hat{a}} \rangle\, \underline{\hat{a}}$

$\qquad \underline{b}_{\perp} := \underline{b} - \underline{b}_{\parallel}$

geometrisch:



(denn mit $\underline{b}_{\parallel} = \lambda\,\underline{a}$ $\quad (\lambda = \langle \underline{b}, \underline{\hat{a}}\rangle / |\underline{a}|)$ $\underline{b}_{\parallel}$ parallel (per def) zu $\underline{a}$; ferner

$$\langle \underline{b}_{\perp}, \underline{a} \rangle = \langle \underline{b} - \langle \underline{b}, \underline{\hat{a}}\rangle \underline{\hat{a}}, \underline{a} \rangle = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle - \langle \underline{b}, \underline{\hat{a}}\rangle \underbrace{\langle \tfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|}, \underline{a} \rangle}_{= |\underline{a}|}$$

$$= \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle - \langle \underline{b}, |\underline{a}|\,\underline{\hat{a}} \rangle = 0,$$

also $\underline{b}_{\perp} \perp \underline{a}$ und schließlich $\underline{b} = \underline{b}_{\parallel} + \underline{b}_{\perp}$,

damit ergibt sich genau obiges Bild.)

insbesondere ist $|\underline{b}_{\parallel}| = |\langle \underline{b}, \underline{\hat{a}} \rangle|$, d.h.

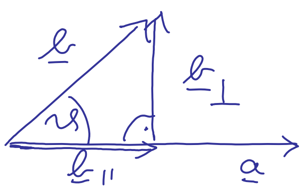
$$\boxed{|\langle \underline{b}, \underline{\hat{a}} \rangle| = \text{Länge der Projektion von } \underline{b} \text{ auf } \underline{a}}$$

auch: $\quad \underline{b}_{\parallel} = \boxed{\langle \underline{b}, \underline{\hat{a}} \rangle\, \underline{\hat{a}} = \text{Projektion von } \underline{b} \text{ auf } \underline{a}}$

Diese häufig benutzten Relationen ergeben die geometrische Deutung des Skalarprodukts.

$\rightarrow$ Cauchy-Schwarz Ungleichung: $|\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle| \le |\underline{a}|\,|\underline{b}|$ (s.u.)

$\rightarrow$ Winkel zwischen Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$:



$$\cos\vartheta \overset{!}{=} \frac{|\underline{b}_{\parallel}|}{|\underline{b}|} = \frac{|\langle \underline{b}, \underline{\hat{a}} \rangle|}{|\underline{b}|} = \frac{|\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle|}{|\underline{b}|\,|\underline{a}|}$$

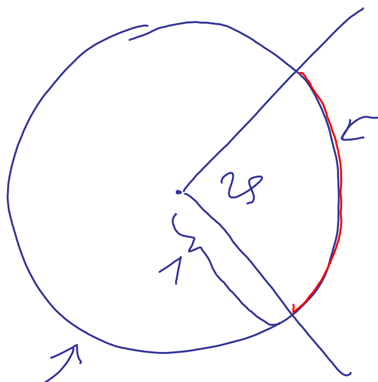
damit $\vartheta > \pi/2$ ($\hat{=}\ 90°$) falls $\langle \underline{b}, \hat{\underline{a}} \rangle < 0$

setzen wir

$$\boxed{\cos\vartheta \overset{!}{=} \frac{\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle}{|\underline{b}||\underline{a}|} = \langle \hat{\underline{b}}, \hat{\underline{a}} \rangle}\ , \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

($\rightarrow$ geometrische Interpretation / Definition des Skalarprodukts: $\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle = |\underline{b}||\underline{a}| \cos\vartheta$)

⌈ Bogenmaß eines Winkels:



Einheitskreis

Länge des durch die Geraden bestimmten Kreisbogens

=: Bogenmaß des Winkels ϑ

$\rightarrow$
$$\begin{aligned} 360° &\hat{=} 2\pi \\ 180° &\hat{=} \pi \\ 90° &= \pi/2 \\ 45° &= \pi/4 \\ 30° &= \pi/6 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$
⌋

Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung:

nach Konstruktion $|\underline{b}_{\parallel}|^2 = |\underline{b}|^2 - |\underline{b}_{\perp}|^2$ (s.d. Pythagoras),

d.h. $|\underline{b}|^2 \geq |\underline{b}_{\parallel}|^2 = \langle \underline{b}, \hat{\underline{a}} \rangle^2 = \left(\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \frac{1}{|\underline{a}|} \right)^2$

$\rightarrow \quad |\underline{b}|^2 |\underline{a}|^2 \geq \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle^2 \rightarrow |\underline{b}||\underline{a}| \geq |\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle|$ ■

Beispiele in den Übungen!

Vektorprodukt für 3D eukl. VR (mit Orientierung)

$$\Sigma: \quad V \ni \underline{a}, \underline{b} \longmapsto \underline{a} \times \underline{b} \in V$$

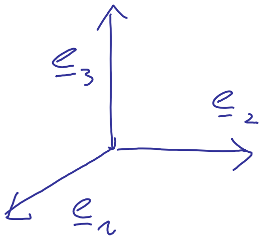
mit definierenden Eigenschaften

1) $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$ (Antisymmetrie)

2) $(\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \lambda (\underline{a} \times \underline{b})$
$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$ (Linearität)

3) $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ orthonormal $\Rightarrow$ $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ rechtshändige ONB

z.B.



nach 3) gilt:

$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$$
$$\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2$$
$$\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$$

nach 1) $\underline{a} \times \underline{a} = \underline{0} \longrightarrow \underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times (\underline{b}_\parallel + \underline{b}_\perp) =$

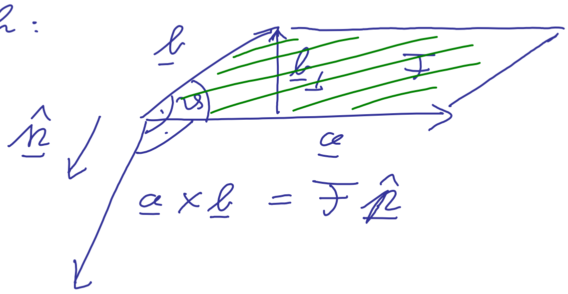
$$\underline{a} \times \underline{b}_\perp = |\underline{a}|\,|\underline{b}_\perp|\ \underbrace{\hat{\underline{a}} \times \hat{\underline{b}}_\perp}_{=:\ \hat{\underline{n}}}$$

Einheitsvektor s.d. $\hat{\underline{a}}, \hat{\underline{b}}_\perp, \hat{\underline{n}}$ rechtshändige ONB

mit $|\underline{b}_\perp|^2 = |\underline{b}|^2 - |\underline{b}_\parallel|^2$
$= |\underline{b}|^2 (1 - \cos^2\vartheta) = |\underline{b}|^2 \sin^2\vartheta$ also

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a} \times \underline{b} &= |\underline{a}|\,|\underline{b}|\,|\sin\vartheta|\ \hat{\underline{n}} \\ \text{insbes.}\quad |\underline{a} \times \underline{b}| &= |\underline{a}|\,|\underline{b}|\,|\sin\vartheta| \end{aligned}}$$

geometrisch:

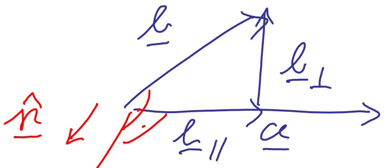


$F = |\underline{a}|\,|\underline{b}_\perp| = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin\vartheta$

$\underline{a} \times \underline{b} = F\, \hat{\underline{n}}$

<u>Anwendungen</u>:

- Spatprodukt (s.u.)
- <u>Orthogonalkomponente</u>:



$$\boxed{\begin{aligned} \underline{b}_\parallel &= \langle \hat{\underline{a}}, \underline{b} \rangle\, \hat{\underline{a}} \\ \underline{b}_\perp &= (\hat{\underline{a}} \times \underline{b}) \times \hat{\underline{a}} \end{aligned}}\quad !$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{a}} \times \underline{b} &= |\underline{b}_\perp|\, \hat{\underline{n}} \\ \hat{\underline{n}} \times \hat{\underline{a}} &= \hat{\underline{b}}_\perp \end{aligned}\right\}$$