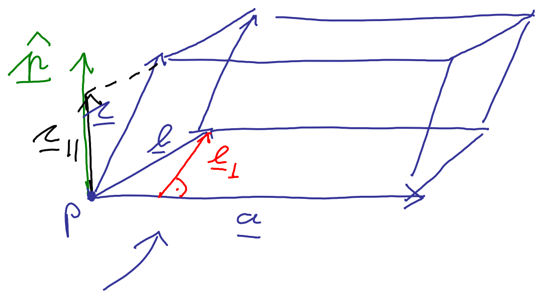
Spatprodukt

Problem: Volumen V eines durch $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ aufgespannten Parallelepipeds



(≡ Punktmenge erhalten durch Translation von P unter
$M = \{ \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} \mid \alpha, \beta, \gamma \in [0,1] \}$)

Parallelepiped oder auch Spat.

$$V = F \cdot h = \underbrace{|\underline{a}||\underline{b}_\perp|}_{= |\underline{a} \times \underline{b}|} \underbrace{|\underline{c}_\parallel|}_{= |\langle \hat{\underline{n}}, \underline{c} \rangle|} = \Big| \underbrace{|\underline{a} \times \underline{b}| \langle \hat{\underline{n}}, \underline{c} \rangle}_{= \langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle} \Big|$$

d.h.

$$\boxed{V_{\underline{a},\underline{b},\underline{c}} = |\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle|}$$

$\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle$ ist das Spatprodukt der Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

aus geometrischen Gründen gilt $V_{\underline{a},\underline{b},\underline{c}} \overset{!}{=} V_{\underline{b},\underline{c},\underline{a}} \overset{!}{=} V_{\underline{c},\underline{a},\underline{b}} \overset{!}{=} \dots$

tatsächlich gilt:

$$\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{b} \times \underline{c}, \underline{a} \rangle = \langle \underline{c} \times \underline{a}, \underline{b} \rangle$$
$$= -\langle \underline{b} \times \underline{a}, \underline{c} \rangle = -\langle \underline{c} \times \underline{b}, \underline{a} \rangle = -\langle \underline{a} \times \underline{c}, \underline{b} \rangle ;$$

(Beweis durch genaues Hinschauen!)

Vektorprodukt in Komponenten:

für rechtshändige ONB $B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ gilt

$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3, \longrightarrow \underline{e}_2 \times \underline{e}_1 = -\underline{e}_3, \quad \underline{e}_i \times \underline{e}_i = \underline{0},$

$\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1, \longrightarrow \underline{e}_3 \times \underline{e}_2 = -\underline{e}_1,$

$\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2, \longrightarrow \underline{e}_1 \times \underline{e}_3 = -\underline{e}_2,$

damit folgt für $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_B$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_B$: $\underline{a} \times \underline{b} =$

$(a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3) \times (b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 + b_3 \underline{e}_3) =$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\underline{e}_3 + (-a_1 b_3 + a_3 b_1)\underline{e}_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}_B$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}_B \times \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2\\ a_3 b_1 - a_1 b_3\\ a_1 b_2 - a_2 b_1\end{pmatrix}_B}$$

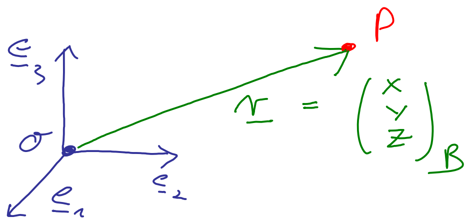
Mathematik des dreidimensionalen euklidischen Vektorraum V_3 (der 3D Translationen) ermöglicht

Analytische Geometrie im euklidischen Raum E_3

E_3 = Gesamtheit aller Raumpunkte;
kein Vektorraum, denn Punkte lassen sich weder addieren noch mit einem Skalar multiplizieren,
aber eng verwandt mit V_3 ... (siehe unten: (*))

$\rightarrow$ Kartesisches Koordinatensystem

bestehend aus 1) Ursprung $\mathcal{O} \in E_3$
2) ONB $B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ von V_3



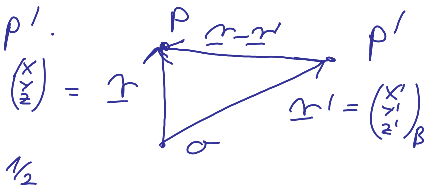
$\rightarrow$ bel. Raumpunkt P eindeutig beschrieben durch
Ortsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}_B$,

x, y, z sind die kartesischen Koordinaten des Punkts $P = \mathcal{O} + \underline{r}$
bzgl. $\mathcal{O}$ und B.

Vorsicht: ungenaue bis sehr ungenaue Sprechweisen üblich (da praktisch!):

statt „Punkt P mit Ortsvektor $\underline{r}$ bzg $\mathcal{O}$"
kurz „Punkt P mit Ortsvektor $\underline{r}$",
kürzer: „Punkt $\underline{r}$" oder „am Ort $\underline{r}$", „bei $\underline{r}$", ...

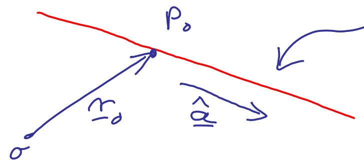
Abstand zweier Punkte P und P':



$$|\overrightarrow{PP'}| = |\underline{r} - \underline{r}'|$$
$$= \left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{1/2}$$

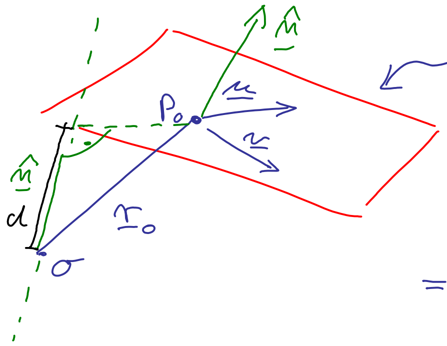
etc.

etwa:



Gerade durch $P_0 = o + \underline{r}_0$, $\parallel \underline{a}$

$= \{ o + \underline{r}_0 + \lambda \underline{a} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$;



Ebene durch P_0, aufgespannt durch $\underline{v}, \underline{u}$

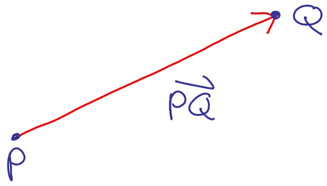
$= \{ o + \underline{r}_0 + \lambda \underline{u} + \mu \underline{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

$=$ Ebene durch P_0, $\perp$ zu $\underline{u} \times \underline{v} =: \underline{n}$

$$= \{ o + \underline{r} \mid \langle \underline{r}, \hat{\underline{n}} \rangle \overset{!}{=} \underbrace{\langle \underline{r}_0, \hat{\underline{n}} \rangle}_{= d\text{, Abstand der Ebene zu } o} \}$$

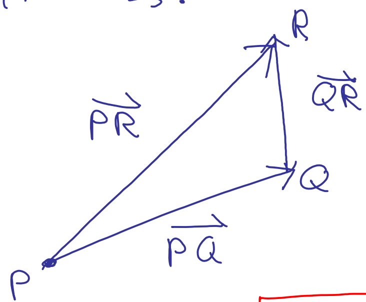
Hessesche Normalenform

(*) offenbar kann je zwei Punkten $P, Q \in E_3$ genau ein Translationsvektor (oder Verbindungsvektor) $\overrightarrow{PQ} \in V_3$ zugeordnet werden:



diese Abbildung $E_3 \ni P, Q \longmapsto \overrightarrow{PQ} \in V_3$ genügt den zwei Bedingungen $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$ und $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ für bel. $P, Q, R \in E_3$.

Dreiecksbedingung



wir schreiben: $\boxed{\overrightarrow{PP'} = P' - P}$, „Differenzvektor von P und P'"

und folglich auch: $\boxed{P' = P + \overrightarrow{PP'}}$,

damit Addition von Punkt und Vektor erklärt: Translation des Punkts P um $\underline{a}$ ergibt Punkt $P' = P + \underline{a}$; wie gehabt. Einen derart mit einem Vektorraum verwandten Raum bezeichnen Mathematiker als <u>affin</u>.

(von lat. „affinis": Schwager, Verwandter, Komplize)

Äquivalenz der Ebenen-Definitionen

$$E = \{ \sigma + \underline{r}_0 + \lambda \underline{u} + \mu \underline{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \quad \text{(Parameterform)}$$

und $$\tilde{E} = \{ \sigma + \underline{r} \mid \langle \underline{r}, \hat{\underline{n}} \rangle = \langle \underline{r}_0, \hat{\underline{n}} \rangle \} \quad \text{(Hessesche Normalenform)}$$

$$\hookrightarrow \hat{\underline{n}} = \frac{\underline{u} \times \underline{v}}{|\underline{u} \times \underline{v}|}$$

$E \subset \tilde{E}$: ist $P \in E$ dann $\underline{r} = P - \sigma = \underline{r}_0 + \lambda \underline{u} + \mu \underline{v}$

und somit $\langle \underline{r}, \hat{\underline{n}} \rangle = \langle \underline{r}_0 + \underbrace{\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}}_{\perp}, \hat{\underline{n}} \rangle = \langle \underline{r}_0, \hat{\underline{n}} \rangle$,

d.h. $P = \sigma + \underline{r} \in \tilde{E}$ $\blacksquare$

$\tilde{E} \subset E$: ist $P \in \tilde{E}$ so erfüllt $\underline{r} = P - 0$ die Bedingung

$\langle \underline{r}, \hat{\underline{n}} \rangle = \langle \underline{r}_0, \hat{\underline{n}} \rangle$, d.h. $\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \hat{\underline{n}} \rangle = 0$, also

$\underline{r} - \underline{r}_0 \perp$ zu $\underline{u} \times \underline{v}$ und damit in der durch

$\underline{u}$ und $\underline{v}$ aufgespannten Ebene, d.h. $\underline{r} - \underline{r}_0 = \lambda \underline{u} + \mu \underline{v}$

für geeignete $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Folglich $P = \sigma + \underline{r} = \underline{\sigma + \underline{r}_0 + \lambda \underline{u} + \mu \underline{v} \in E}$ $\blacksquare$