Lineare Abbildungen und deren Matrixdarstellungen

allg. Abbildung:
(Funktion)

Definitionsbereich, Wertebereich

$$A: M_1 \longrightarrow M_2$$
$$a \longmapsto A(a)$$

Abbildungsvorschrift

z.B. $f: \,]0,1[\, \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x}$$

Lineare Abbildung:

Definitionsvektorraum, Wertevektorraum

$$A: V_1 \longrightarrow V_2$$
$$\underline{u} \longmapsto A(\underline{u})$$

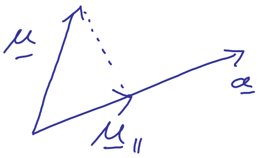
mit Eigenschaft:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} A(\underline{u} + \underline{v}) &= A(\underline{u}) + A(\underline{v}) \\ A(\lambda \underline{u}) &= \lambda A(\underline{u}) \end{aligned}\right\} \text{Linearität}}$$

Notation: statt $A(\underline{u})$ nur $A\underline{u}$

Beispiele linearer Abbildungen:

1) Projektion auf Vektor $\underline{a}$:
$$P_{\underline{a}}: V \longrightarrow V$$
$$\underline{u} \longmapsto \langle \hat{\underline{a}}, \underline{u} \rangle \underline{a}$$

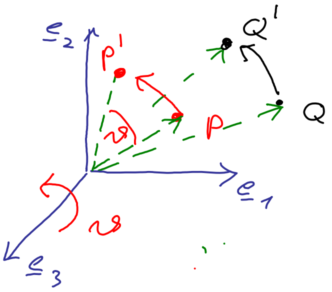


2) „Länge" der Projektion auf $\underline{a}$:
$$l_{\underline{a}}: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\underline{u} \longmapsto \langle \hat{\underline{a}}, \underline{u} \rangle$$

3) Drehung

im E_3 um Achse durch O parallel zu $\underline{e}_3$:

$$D: V_3 \longrightarrow V_3$$
$$\underline{r} \longmapsto D\underline{r} = \dots$$
(später)



linear! (denn ...)

ONB

A linear $\Rightarrow A\underline{o} = \underline{o}$ (denn $A\underline{o} = A(0\underline{u}) = 0(A\underline{u}) = \underline{o}$)

Matrixdarstellung einer linearen Abbildung:

Vektor $\underline{u} \in V_1 \longrightarrow$ n-Tupel $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{B_1}$

$B_1 = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$
$B_2 = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m\}$

lin. Abb. $A : V_1 \to V_2 \longrightarrow$ $m \times n$ Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}_{B_1 B_2}$

Vektor $\underline{v} = A\underline{u} \in V_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}_{B_2} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

Matrixmultiplikation

mit $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}_{B_2} = A\underline{e}_i$ und $v_j \overset{!}{=} a_{j1}u_1 + a_{j2}u_2 + \dots + a_{jn}u_n = \sum_i a_{ji} u_i$

„Bilder der Basisvektoren = Spalten der Abbildungsmatrix"

Warum?

lin Abb $A : V_1 \to V_2$, $B_1 = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, $B_2 = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m\}$ Basis von $V_{1/2}$

mit $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{B_1} = \sum_{i=1}^{n} u_i \underline{e}_i$ folgt

$$A\underline{u} = A\left(\sum_i u_i \underline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i A\underline{e}_i$$

Bild des i-ten Basisvektors unter A

$a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}$ seien die Komponenten von $A\underline{e}_i \in V_2$ bzgl. B_2, d.h. $A\underline{e}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}_{B_2}$ und somit $$A\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots a_{mn}u_n \end{pmatrix}$$

$$=: \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{B_2 B_1} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{B_1}$$

$\blacksquare$

<u>Beispiele</u> ...