

Vorkurs Physik WS2019/20 – Blatt 10

Webpage: <http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vorkurs2019.html/>

Besprechung: 24 . September 2019

7. Summen

a) Wie ist das Kronecker-Delta δ_{ij} definiert?

b) Ermitteln Sie folgende Summen:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{10} \cos(\pi n) \delta_{n1}, & \sum_{n=0}^{10} \cos(\pi n), & \sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^{10} 1, & \sum_{m,n=1}^{10} 1, & \sum_{m,n=1}^{10} \delta_{mn} \\ & \sum_{m=1}^4 m, & \sum_{m,n=1}^4 mn, & \sum_{m,n=1}^4 mn \delta_{mn}, & \sum_{l,m,n=1}^{10} l \delta_{lm} \delta_{mn}, & \sum_{m,n=0}^{10} a_{mn} \delta_{mn} \delta_{n0}. \end{aligned}$$

c) $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ sei eine ONB eines euklidischen Vektorraums. Ferner seien $\vec{u} = \sum_{l=1}^n u_l \vec{b}_l$ und $\vec{v} = \sum_{l=1}^n v_l \vec{b}_l$. Zeigen Sie, dass $u_m = \langle \vec{b}_m, \vec{u} \rangle$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{l=1}^n u_l v_l$ und $|\vec{u}| = \sqrt{\sum_{l=1}^n u_l^2}$.

8. Parallelogramm

a und b seien die Seitenlängen eines Parallelogramms. Die Längen seiner Diagonalen seien e und f . Zeigen Sie:

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

9. Winkel und Skalarprodukt

a) Wie ist der Winkel zwischen zwei Vektoren eines euklidischen Vektorraums definiert?

b) Wie lautet der Kosinussatz?

c) Beweisen Sie den Kosinussatz mittels Vektorrechnung.

10. Orthonormalbasis

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ sei eine Orthonormalbasis eines euklidischen Vektorraums V . Eine weitere Basis C von V sei durch die Vektoren

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_3), \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 + \vec{e}_4), \quad \vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_3), \quad \vec{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 - \vec{e}_4),$$

gegeben.

a) Was ist eine Orthonormalbasis?

b) Handelt es sich bei C um eine Orthonormalbasis von V ?

c) Gegeben seien nun die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C.$$

Bestimmen Sie die Beträge dieser Vektoren, den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} und den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{c} (unterschiedliche Basen beachten!).