Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
M. Ernst, A. Wolff, T. Zell

10. Übung zur Theoretischen Physik in zwei Semestern II

Wintersemester 2009/2010

Abgabe: *Mittwoch 20. Januar,* **Klausur:** *Freitag, 5. Februar, 10-12 Uhr, SR Kernphysik*

30. Oberfläche und Volumen in $d \gg 1$ *3 Punkte*

Bestimmen Sie das Verhältnis der ε-verbreiterten Oberfläche $O_{d,\varepsilon}$ einer d-dimensionalen Einheitskugel zu ihrem Volumen $V_d(1)$ für $\varepsilon = 1/100$ und Dimensionen $d = 2, 3, 10, 100, 10^3, 10^4$ sowie $d = 10^{23}$. Verwenden Sie dabei $O_{d,\varepsilon} = V_d(1) - V_d(1-\varepsilon)$.

31. Ultrarelativistisches ideales Gas *12 Punkte*

Bewegen sich die Teilchen eines Gases mit nahezu Lichtgeschwindigkeit c, so muss ihre Energie relativistisch gemäß der Energie-Impuls-Beziehung $E = \sqrt{(m_0 c)^2 + c^2|\mathbf{p}|^2}$ bestimmt werden. Im Falle sehr hochenergetischer Gasteilchen mit $E \gg m_0 c^2$ spricht man von einem ultrarelativistischen Gas. Hier kann die Ruhemasse m_0 vernachlässigt werden und die Energie eines Teilchens mit Impuls $\mathbf{p}$ ist in guter Näherung $E = c|\mathbf{p}|$. Bestimmen Sie anhand des mikrokanonischen Ensembles die kalorische und thermische Zustandsgleichung eines ultrarelativistischen Gases mit N Teilchen im Volumen V. Zeigen Sie, dass der Druck p des Gases mit der Energiedichte $u = E/V$ über die einfache Beziehung $p = u/3$ zusammenhängt.

32. Hohlraumstrahlung *15 Punkte*

Wir betrachten elektromagnetische Strahlung in einem kubischen Hohlraum der Kantenlänge L. Die elektromagnetischen Eigenmoden des Hohlraums sind ebene elektromagnetische Wellen $E_{\mathbf{k}}$, deren Wellenvektoren $\mathbf{k}$ die Randbedingungen respektieren. Nehmen wir der Einfachheit halber periodische Randbedingungen an[1], so sind dies Wellenvektoren der Form

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}\,, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3\,. \tag{1}$$

Die Frequenz $\omega_{\mathbf{k}}$ der Eigenmode mit Wellenvektor $\mathbf{k}$ ist $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist.
Zur quanten-statistischen Beschreibung der Hohlraumstrahlung fassen wir jede $\mathbf{k}$-Mode als einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator der Frequenz $\omega_{\mathbf{k}}$ auf, dessen mittlere Besetzungszahl $n_{\mathbf{k}}$ bei gegebener Temperatur T nach Aufgabe 29b) durch die Bose-Einstein-Verteilung

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{\mathbf{k}}/k_B T} - 1}$$

gegeben ist. Die Energiedichte $u = E/L^3$ der Hohlraumstrahlung ist dann offenbar durch

$$u = \frac{2}{L^3}\sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$$

gegeben, wobei sich die Summe über alle Wellenvektoren gemäß (1) erstreckt. Der Faktor zwei berücksichtigt die zwei möglichen Polarisationen der elektromagnetischen Moden. Die *spektrale*

[1] Realistischere Randbedingungen führen zu gleichen Resultaten, sind aber umständlicher in der Handhabung.

Energiedichte $s(\omega)$ (als Energiedichte per infinitesimalen Frequenzintervall) ist dementsprechend

$$s(\omega) = \frac{2}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$$

a) Zeigen Sie, dass die Energiedichte u der Hohlraumstrahlung allein durch die Temperatur nach folgendem einfachen Gesetz bestimmt ist

$$u = \alpha T^4 \qquad \text{(Stefan-Boltzmann-Gesetz)} .$$

Hierbei ist α die universelle Konstante $\alpha = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3} \approx 7.6\, JK^{-4}m^{-3}$.
[Hinweis: Nähern Sie die auftretende Summe wie folgt durch eine Integral an:

$$\sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) \stackrel{!}{=} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi/L)^3} f(\mathbf{k}) ,$$

Warum gilt diese Näherung? Ferner hilft die Identität $\int_0^\infty x^3/(e^x - 1)\, dx = \pi^4/15$.]

b) Zeigen Sie, dass die spektrale Energiedichte dem Planckschen Strahlunggesetz genügt:

$$s(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} .$$

c) Welchen Druck übt die Hohlraumstrahlung auf die Wände des Hohlraums aus?
[Hinweis: Aufgabe 29.]