Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
A. Wolff, T. Zell

5. Übung zur Theoretischen Physik in zwei Semestern II

Wintersemester 2009/2010

Abgabe: *Mittwoch 18. November,* **Klausur:** *Dienstag 1. Dezember, 10-12 Uhr*

17. Quantenmechanischer Formalismus *0 Punkte*

Folgende Fragen sollten Ihnen helfen den Formalismus der Quantenmechanik zu verinnerlichen.

1. Welche physikalische Bedeutung hat das Plancksche Wirkungsquantum? Wie groß ist es?
2. Muss man einen Oszillator mit Schwingungsfrequenz $1s$ und Schwingungsenergie $1J$ quantenmechanisch beschreiben?
3. Durch welche mathematischen Objekte werden Zustände eines quantenmechanischen Systems beschrieben?
4. Was versteht man unter Superposition zweier Zustände?
5. Was bedeutet die Orthogonalität zweier Zustände mathematisch und physikalisch?
6. Was ist ein Operator? Wann ist ein Operator hermitesch? Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren eines Operators?
7. Was ist eine Observable? Wie bestimmt sich der Erwartungswert einer Observable eines Systems im Zustand ψ?
8. Wozu braucht man Schrödingergleichungen und Hamilton-Operatoren?
9. Wie lautet die Schrödingergleichung?
10. Warum muss ein Hamilton-Operator hermitesch sein?
11. Was versteht man unter der *zeitunhabhängigen* Schrödingergleichung?
12. Was ist der Zusammenhang zwischen dem Zustand $|\psi\rangle$ eines Teilchen und seiner Wellenfunktion $\psi(\underline{r})$?
13. $\psi(\underline{\mathrm{r}})$ und $\phi(\underline{\mathrm{r}})$ seien die Wellenfunktionen zweier Teilchenzustände $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$, $\hat{V}$ sei ein Potentialoperator zur Potentialfunktion $V(\underline{\mathrm{r}})$. Stellen Sie $\langle\psi|\phi\rangle$ und $\langle\psi|\hat{V}|\phi\rangle$ durch die Wellenfunktionen dar.
14. Wie ist der Impuls-Operator eines Teilchen definiert? Wie lautet er in Ortsdarstellung?
15. Wie lautet die Wellenfunktion eines Impulseigenzustands $|p\rangle$?
16. Wie lautet der Hamilton-Operator eines freien Teilchens?
17. Wie ist der Kommutator $[A, B]$ zweier Operatoren A und B definiert?
18. Was ist $[\hat{x}, \hat{p}]$?

18. Ehrenfesttheorem *15 Punkte*

a) $\psi(t)$ sei der zeitabhängige Zustand eines quantenmechanischen Systems mit Hamilton-Operator H. Für eine beliebige Observable A sei $\langle A \rangle_t \equiv \langle A \rangle_{\psi(t)}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle_t = \frac{i}{\hbar}\langle [H, A] \rangle_t \, .$$

[Hinweis: Rechnung analog zur derjenigen im Beweis der Aussage "$[H, A] = 0 \Leftrightarrow A$ Erhaltungsgröße".]

b) Das System sei nun ein 1D Teilchen im harmonischen Potenzial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\langle x \rangle_t = \frac{1}{m}\langle p \rangle_t \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\langle p \rangle_t = -k\langle x \rangle_t \, .$$

Vergleichen Sie diese Beziehungen mit den Bewegungsgleichungen eines harmonischen Oszillators in der klassischen Mechanik.

c) Das Resultat von Aufgabenteil b) kann für ein beliebiges Potenzial $V(x)$ verallgemeinert werden. Zeigen Sie nun,

$$\frac{d}{dt}\langle x \rangle_t = \frac{1}{m}\langle p \rangle_t \, , \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\langle p \rangle_t = -\langle \hat{V}' \rangle_t \, ,$$

wobei der Operator $\hat{V}'$ durch $\hat{V}' \left| x \right\rangle := V'(x) \left| x \right\rangle$ gegeben ist.