Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
M. Ernst, A. Wolff, T. Zell

8. Übung zur Theoretischen Physik in zwei Semestern II

Wintersemester 2009/2010

Abgabe: *Mittwoch 16. Dezember*

Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Präsenzaufgaben.

25. Würfeln *6 Punkte*

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse beim Würfelspielen mit einem fairen Würfel:

a)* Bei einmal Würfeln erscheint eine eins oder eine sechs.

b)* Bei dreimal Würfeln erscheint keine sechs.

c)* Bei dreimal Würfeln erscheint mindestens einmal eine eins oder eine sechs.

d) Bei dreimal Würfeln erscheint mindestens einmal eine sechs aber keine eins.

e) Bei sechsmal Würfeln erscheint sechsmal die sechs.

f) Bei sechsmal Würfeln erscheinen alle Augenzahlen eins bis sechs genau einmal.

26. Nochmal würfeln *6 Punkte*

Zwei faire Würfel werden geworfen.

a)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_s dafür, dass die Summe der Augenzahlen s ergibt.

b) Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung p_s.

c) Bestimmen Sie den Mittelwert $\langle s \rangle$ und die Varianz Δs.

27. Fakultät *8 Punkte*

a)* Auf wieviel verschiedene Arten kann man N verschiedene Weihnachtskugeln auf M Zweige eines Christbaums verteilen, wenn an keinem Zweig mehr als eine Kugel hängen darf? Ist diese Zahl für $N = 20$ und $M = 50$ größer oder kleiner der Anzahl Nadeln am Baum?

b) Beweisen Sie die Näherung

$$n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n \;\approx\; \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

[Tip: Gleichung logarithmieren und die dann auftretende Summe durch ein Integral näheren.]

28. Binomial-Koeffizient *10 Punkte*

a)* Von insgesamt N verschiedenen Weihnachtskugeln sollen $L \leq N$ Kugeln auf einen Christbaum, die $N - L$ restlichen auf einen zweiten Baum gehängt werden. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Kugeln auf diese Weise auf die zwei Bäume aufzuteilen?

b) Zeigen Sie mittels 27b) folgende Näherung des Binomial-Koeffizienten $\binom{n}{l} \equiv \frac{n!}{l!(n-l)!}$ für den Fall $l \equiv \lambda n$:

$$\binom{n}{\lambda n} \approx e^{nH_2(\lambda)} ,$$

wobei die *binäre Entropie* $H_2(x)$ für $x \in [0, 1]$ durch

$$H_2(x) = -x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x)$$

gegeben ist.

c) Sizzieren Sie den Graphen der Funktion $H_2(x)$.

29. Kopf oder Zahl *10 Punkte*

a) Eine faire Münze wird n mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlickkeit $P_n(m)$ dafür, dass dabei genau m mal "Kopf" erscheint? Was ist der wahrscheinlichste Wert für m?

b) Nun betrachten wir eine gezinkte Münze, bei der "Kopf" mit Wahrscheinlichkeit p und "Zahl" mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ erscheint. Wir groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit $P_n(m)$ dafür, dass bei n Würfen genau m mal "Kopf" erscheint? Was ist der wahrscheinlichste Wert für m?

c) Skizzieren Sie (evtl. mit Hilfe des Computers) die Wahrscheinlichkeit $P_n(x)$ aus a) als Funktion von $x \equiv m/n$ jeweils für $n = 10, 100$ und $n = 1000$.