Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
M. Ernst, A. Wolff, T. Zell

# 9. Übung zur Theoretischen Physik in zwei Semestern II

*Wintersemester 2009/2010*

**Abgabe:** *Mittwoch 13. Januar*

## 28. Zweizustandssysteme

*20 Punkte*

Ein mikroskopisches quantenmechanisches System $\mathcal{A}$ habe genau zwei Eigenzustände $|n\rangle$, $n = 0, 1$, zu Eigenenergien $E_0 = 0$ bzw. $E_1 = \varepsilon > 0$.[1] Wir betrachten nun ein makroskopisches System $\mathcal{M}$, das aus einer großen Anzahl $N \gg 1$ identischer Systeme $\mathcal{A}$ besteht. Ein Mikrozustand $x$ des Systems $\mathcal{M}$ ist durch die Quantenzahlen $n_1, \ldots, n_N$, wobei $n_i = 0$ oder 1, der $N$ Systeme $\mathcal{A}$ gegeben: $x = (n_1, \ldots, n_N)$. Die Energie des Systems $\mathcal{M}$ bestimmt sich dann aus der Summe der Eigenenergien der in den $N$ Systemen vorliegende Zustände $|n_i\rangle$. Für einen Mikrozustand $x$ erhalten wir demnach die Energie

$$H(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{N} n_i \,.$$

Wir untersuchen das thermodynamische Gleichgewicht des Systems $\mathcal{M}$ mittels des mikrokanonischen Ensembles.

**a)** Zeigen Sie folgende Relationen für Zustandsumme, Entropie und Temperatur:

$$Z(E) \;=\; \binom{N}{E/\varepsilon}\,, \qquad S(E) = k_B N\, h(\tfrac{E}{N\varepsilon})\,, \qquad \frac{1}{T(E)} = \frac{k_B}{\varepsilon} \ln(\tfrac{N\varepsilon}{E} \;-1)\,,$$

( $N \gg 1$, $h(x) = -x \ln x \;-\; (1-x)\ln(1-x)$ bezeichnet die binäre Entropie )

**b)** Zeigen Sie anhand von a): Ein zufällig aus $\mathcal{M}$ gewähltes System $\mathcal{A}$ hat im Mittel die Energie

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_BT} + 1}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit $p$, dass sich ein zufällig ausgewähltes System $\mathcal{A}$ im Zustand $|1\rangle$ befindet, genügt der *Fermi-Verteilung*

$$p = f(\varepsilon) \equiv \frac{1}{e^{\varepsilon/k_BT} + 1}\,.$$

[1] $|0\rangle$ und $|1\rangle$ könnten etwa zwei bestimmte Energie-Niveaus eines Wasserstoffatoms bezeichnen. $\mathcal{A}$ wäre dann ein stark vereinfachtes Modell des Wasserstoffatoms.

## 29. Harmonische Oszillatoren *20 Punkte*

Im Unterschied zur Aufgabe 28 sei nun das mikroskopische System $\mathcal{A}$ ein harmonischer Oszillator der Frequenz $\omega$ mit Eigenzuständen $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, zu Eigenenergien $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Ein Mikrozustand $x$ des makroskopischen Systems $\mathcal{M}$ ($= N$ identische Oszillatoren $\mathcal{A}$) ist jetzt durch die Quantenzahlen (Besetzungszahlen) $n_1, \ldots, n_N$ gegeben: $x = (n_1, \ldots, n_N)$, $n_i = 0, 1, 2, \ldots$. Die Energie des Systems $\mathcal{M}$ im Mikrozustand $x$ ist dann $\sum_{i=1}^{N} \hbar\omega(n_i + \frac{1}{2})$. Wir subtrahieren die für die thermodynamische Behandlung unbedeutende konstante Gesamtnullpunktsenergie $N\hbar\omega/2$ und erhalten deshalb die Energie

$$H(x) = \hbar\omega \sum_{i=1}^{N} n_i \, .$$

**a)** Zeigen Sie folgende Relationen für Zustandsumme, Entropie und Temperatur:

$$Z(E) = \binom{K_E + N - 1}{N - 1} \, , \qquad \text{wobei} \quad K_E = \frac{E}{\hbar\omega} \, ,$$

$$S(E) = k_B (K_E + N)\, h(\tfrac{N}{K_E + N}) \, , \qquad \frac{1}{T(E)} = \frac{k_B}{\hbar\omega} \ln(\tfrac{N}{K_E} + 1) \, .$$

( $N \gg 1$, $h(x)$ bezeichnet wieder die binäre Entropie. )

**b)** Zeigen Sie anhand von a): Ein zufällig aus $\mathcal{M}$ gewählter Oszillator hat im Mittel die Energie

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \, ,$$

und die mittlere Besetzungszahl $\bar{n} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1} n_i$ genügt der *Bose-Einstein-Verteilung*,

$$\bar{n} = b(\hbar\omega) \equiv \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \, .$$

**c)** Ermitteln Sie Näherungen für $\bar{n}$ für die Fälle $k_B T \gg \hbar\omega$ und $k_B T \ll \hbar\omega$. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

**Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!**