Lineare Algebra und Vektoranalysis
Sommersemester 2019
Präsenzübung vom 11.04.19

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

Hinweise zum Übungsbetrieb

- Homepage zur Übung:
  `http://www.thp.uni-koeln.de/~skleinbo/teaching/LinAlgebra2019/`
- Die *Übungsaufgaben* werden immer Donnerstags auf oben genannter Seite zum Download zur Verfügung gestellt. Die *Abgabe der Lösung* erfolgt eine Woche später *bis spätestens Donnerstags 10:00* in die Briefkästen vor dem Institut für Theoretische Physik (im Altbau).
- Heften Sie alle Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen und schreiben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen des Übungsgruppenleiters bzw. der Übungsgruppenleiterin auf die erste Seite.
- Sie dürfen in Gruppen von bis zu 3 Personen abgeben. Wir ermuntern Sie ausdrücklich dazu, die Aufgaben in kleineren Gruppen zu bearbeiten und über möglichen Lösungswege zu diskutieren. Durch Abschreiben der Lösung von Ihren Kommilitonen und Kommilitoninnen geht Ihnen ein wichtiger Teil der Vorlesung verloren.
- Wenn Sie Schwierigkeiten mit dem Stoff haben und etwas nicht verstehen, versuchen Sie, diese Probleme umgehend zu beheben. Teile der Vorlesung bauen meist auf Vorangegangenes auf und Wissenslücken werden im Laufe des Semester immer schwieriger zu füllen sein. Anlaufstellen bei Fragen (in der Reihenfolge, wie sie auch aufgesucht werden sollten): Literatur, Ihre Kommilitonen/Kommilitoninnen, das Fachschaftstutorium und die Fragestunde (freitags 10:00 - 11:30 Konferenzraum 0.01), die Übungen oder der Lesende nach der Vorlesung.
- Dieses Übungsblatt ist unbepunktet und wird in den Übungen am 11.04. bearbeitet und besprochen. Wenn Sie Schwierigkeiten mit dem Stoff haben oder Ihnen Themenbereiche nicht bekannt sind, sollten Sie sich unbedingt *vor* der Übung noch damit auseinandersetzen.

1 Vektorräume Ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{F}$ ist ein Tripel $(V, +, \times)$, bestehend aus einer Menge V und zwei Abbildungen, welche den sogenannten *Axiomen eines Vektorraums* genügen.

a) Welche Körper kennen Sie?

b) Wie lauten die Vektorraumaxiome?

c) Sind folgende Objekte Vektorräume?

i) $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ über $\mathbb{R}$

ii) $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ über $\mathbb{C}$

iii) $(P_n, +, \times)$ über $\mathbb{R}$. Hier ist $P_n = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\right\}$ die Menge der reellen Polynom von Grad kleiner gleich n und die Addition $+$ und Multiplikation mit einem Skalar $\times$ sind Punktweise definiert.

iv) $(\mathbb{Z}^3, +, \times)$ über $\mathbb{R}$

d) Was ist eine Basis eines Vektorraums?

e) Sei $\mathcal{E} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ die kartesische Basis des $\mathbb{R}^2$. Zeichnen sie bezüglich dieser Basis die Vektoren mit Komponentendarstellung

$$\mathbf{u}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{\mathcal{E}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^{\mathcal{E}} = 6 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

2 Skalarprodukte Viele Grössen in der Physik haben eine Richtung und müssen als Vektoren oder in Komponenten beschrieben werden. So zum Beispiel Kräfte $\vec{F}$. Führt man eine Bewegung $\vec{x}$ entgegen einer Kraft aus, so muss eine Energie aufgebracht werden. Energie ist jedoch ungerichtet und somit eine skalare Grösse. Die Abbildung $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$, $(\vec{v}, \vec{F}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{F} = E$ führt also aus dem Vektorraum V heraus in die reellen Zahlen.

a) Welche Eigenschaften muss eine Abbildung haben, damit man sie *Skalarprodukt* nennen darf?

b) Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bezüglich einer *Orthonormalbasis.* Sind die folgenden Abbildungen Skalarprodukte?

i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 + u_2 + v_1 + v_2$

ii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2$

iii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_2 - u_2 v_1$

iv) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := 5 u_1 v_1$

c) Was ist eine Norm? Was unterscheidet diese von der Betragsfunktion? Was ist der Zusammenhang zwischen einem Skalarprodukt und dessen induzierten Norm?

3 Differentiation und Integration In dieser Aufgabe wiederholen wir zwei der wichtigsten Konzepte aus der Analysis.

a) Bringen Sie die Begriffe "*Ableitung*", "*unbestimmtes Integral*", "*bestimmtes Integral*", "*Stammfunktion*", "*Steigung*" und "*Fläche*" in Zusammenhang.

b) Wir fassen die Ableitung nun als einen (Differential-) Operator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ auf. Wie andere Operatoren oder Funktionen hat dieser einen Definitionsbereich $\mathcal{X}$ und eine Zielmenge $\mathcal{Y}$. In diesen Mengen befinden sich nun keine Zahlen, sondern Funktion, welche durch die Ableitung ineinander überführt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} :& \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \\ & f \mapsto f' \end{aligned}$$

Sei nun der Definitionsbereich des Ableitungsoperators die Menge der Polynome vom Grad kleiner gleich n mit $n \geq 1$, Welche Mengen müssen sie für $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ einsetzen, damit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ surjektiv[1] ist?

c) Welche Ableitungsregeln kennen Sie? Welche wenden sie auf Produkte von Funktionen an, welche auf verkettete Funktionen?

d) Was für Integrationsmethoden kennen Sie? In welchen Fällen wenden Sie diese an?

[1] Offensichtlich könnte man für die Zielmenge die Menge aller reellen Funktionen einsetzen. Aber nicht Jede reelle Funktion kann durch ableiten eines Polynoms mit grad $\leq n$ erreicht werden. Surjektivität bedeutet, dass jedes Element der Zielmenge durch Ableiten eines Elements aus dem Definitionsbereich konstruiert werden kann. Also ist hier nach der kleinsten Menge gefragt, die man für $\mathcal{Y}$ einsetzen darf.