Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

Hinweise zum Übungsbetrieb

- Homepage zur Übung:
  `http://www.thp.uni-koeln.de/~skleinbo/teaching/LinAlgebra2019/`
- Die *Übungsaufgaben* werden immer Donnerstags auf oben genannter Seite zum Download zur Verfügung gestellt. Die *Abgabe der Lösung* erfolgt eine Woche später *bis spätestens Donnerstags 10:00* in die Briefkästen vor dem Institut für Theoretische Physik (im Altbau).
- Heften Sie alle Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen und schreiben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen des Übungsgruppenleiters bzw. der Übungsgruppenleiterin auf die erste Seite.
- Sie dürfen in Gruppen von bis zu 3 Personen abgeben. Wir ermuntern Sie ausdrücklich dazu, die Aufgaben in kleineren Gruppen zu bearbeiten und über möglichen Lösungswege zu diskutieren. Durch Abschreiben der Lösung von Ihren Kommilitonen und Kommilitoninnen geht Ihnen ein wichtiger Teil der Vorlesung verloren.
- Wenn Sie Schwierigkeiten mit dem Stoff haben und etwas nicht verstehen, versuchen Sie, diese Probleme umgehend zu beheben. Teile der Vorlesung bauen meist auf Vorangegangenes auf und Wissenslücken werden im Laufe des Semester immer schwieriger zu füllen sein. Anlaufstellen bei Fragen (in der Reihenfolge, wie sie auch aufgesucht werden sollten): Literatur, Ihre Kommilitonen/Kommilitoninnen, das Fachschaftstutorium und die Fragestunde (freitags 10:00 - 11:30 Konferenzraum 0.01), die Übungen oder der Lesende nach der Vorlesung.
- Dieses Übungsblatt ist unbepunktet und wird in den Übungen am 11.04. bearbeitet und besprochen. Wenn Sie Schwierigkeiten mit dem Stoff haben oder Ihnen Themenbereiche nicht bekannt sind, sollten Sie sich unbedingt *vor* der Übung noch damit auseinandersetzen.

1 Vector spaces

a) Which number fields do you know?

b) What is a vector space?

c) Which of the following are vector spaces?

i) $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ over $\mathbb{R}$

ii) $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ over $\mathbb{C}$

iii) $(P_n, +, \times)$ over $\mathbb{R}$. We define $P_n = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\right\}$ to be the set of real polynomials of degree smaller or equal to n. Addition $+$, and multiplication with a scalar $\times$ are defined pointwise.

iv) $(\mathbb{Z}^3, +, \times)$ over $\mathbb{R}$

d) What is a basis?

e) Let $\mathcal{E} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ be the standard basis of $\mathbb{R}^2$. Draw the following component vectors with respect to that basis

$$\mathbf{u}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^{\mathcal{E}} = 6 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

2 Scalar products Many physical quantities have a direction and thus need to be modelled as vectors [nevermind the fact that many of them rather ought to be forms, but whatever...]. One example are forces $\vec{F}$. Moving with or against a constant force by a distance $\vec{x}$ expends energy. Energy is a scalar quantity though. The map $\cdot\colon V \times V \to \mathbb{R}$, $(\vec{v}, \vec{F}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{F} = E$ maps from the vector space V into the real numbers.

a) Which properties define any (Euclidean) scalar product on a vector space V?

b) Let $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ be components of $\vec{u}$ and $\vec{v}$ wrt. an *orthonormal basis*. Are the following maps valid scalar products?

i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 + u_2 + v_1 + v_2$

ii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2$

iii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_2 - u_2 v_1$

iv) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := 5 u_1 v_1$

c) What is a *norm*? What is the difference to the absolute value function? What is the connection between scalar products and norms?. Any inner product induces a norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Probably unknown to the students, but something we may pick up in the exercises in due time, is that the reverse holds true in any normed space in which the parallelogram identity holds true.

3 Differentiation and integration

a) Make a connection between the notions of "*derivative*", "*indefinite integral*", "*definite integral*", "*antiderivative*", "*slope*" and "*area*".

b) We may regard the action of taking a derivative as applying an operator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Like any other operator or function it has a domain $\mathcal{X}$ and a codomain $\mathcal{Y}$. These sets do not contain numbers but functions that are mapped onto each other by the derivative:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} :& \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \\ & f \mapsto f' \end{aligned}$$

Let $\mathcal{X} \subset P_n$. How can you chose $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, such that $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ is surjektiv?

c) Which techniques for taking derivatives do you know and when are they applied?

d) Which techniques of integration do you know, and when are they applied?