Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Residuen (4×2=8 P) Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen an ihren Polstellen

a.)
$$f_1(z) = \frac{1}{z(z-a)^3}$$

b.)
$$f_2(z) = \frac{\sin z}{z}$$

c.)
$$f_3(z) = \frac{e^z}{\sin \mathrm{i} z}$$

d.)
$$f_4(z) = z^3 \exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

2 Null- und Polstellen-zählendes Integral (6 P) Wir setzen

$$\mathrm{ord}(f, z_0) := \begin{cases} k & f \text{ hat bei } z_0 \text{ eine Nullstelle k-ter Ordnung} \\ -k & f \text{ hat bei } z_0 \text{ eine Polstelle k-ter Ordnung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer Nullstelle k-ter Ordnung bei $z_0 \in U$.
Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'}{f}, z_0\right] = k$$

Hinweis: Taylor-Entwicklung um die Nullstelle herum.
Habe nun f bei z_0 eine isolierte Polstelle k-ter Ordnung. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'}{f}, z_0\right] = -k$$

Folgern Sie, dass wenn f in U mehrere isolierte Nullstellen N und Polstellen P hat, und Γ ein Weg in U ist der alle Null- und Polstellen umschliesst, gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = \sum_{w \in N \cup P} \mathrm{ind}_\Gamma(w) \,\mathrm{ord}(f, w)$$

wobei $\mathrm{ind}_\Gamma(w)$ den Umlaufsinn ("*Index*") der Kurve um den Punkt w bezeichnet.
Ist also Γ ein Weg der jede Null- und Polstelle genau einmal und im gleichen Sinn umläuft, zählt das Integral die Differenz aus Null- und Polstellen (gewichtet mit der jeweiligen Ordnung).

3 Green'sche Funktionen II (10 P) In Aufgabe 2 von Blatt 7 wurde die Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators bis auf die Ausführung des Integrals

$$G(t,t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}}{-\omega^2 - 2\mathrm{i}\gamma\omega + \omega_0^2}\, \mathrm{d}\omega$$

hergeleitet. Mithilfe des Residuenkalküls können wir dieses Integral nun berechnen. Nehmen Sie zunächst $\omega_0 \neq \gamma$ an. Es soll aber nicht unbedingt $\omega_0 > \gamma$ sein. Gegebenenfalls müssen Sie eine Fallunterscheidungen treffen.

a) (2 P) Schreiben Sie das Integral als ein komplexes Linienintegral längs der reellen Achse.

b) (1 P) Fertigen Sie eine Skizze der komplexen Ebene an. Tragen Sie die Polstellen des Integranten ein.

c) (2 P) Um den Residuensatz anwenden zu können, benötigen wir eine geschlossene Integrationskontour.

Schliessen Sie den Integrationsweg geeignet durch ein Wegstück das nicht zum Integral beiträgt. Begründen Sie Ihre Wahl.

d) (3 P) Werten Sie das geschlossene Wegintegral mittels Residuensatz aus.

Vergleichen Sie mit dem Ausdruck für die Green'sche Funktion von Blatt 7. Enthält Ihre Lösung auch die Theta-Funktion? Falls nicht, gehen Sie nochmal zu Teil c) zurück.

e) (2 P) Betrachten Sie nun den aperiodischen Grenzfall $\omega_0 = \gamma$ und werten Sie das Integral erneut für diesen Fall aus.

4 Unendliche Reihen mittels Residuen (8+3 P) Wir wollen den Wert der unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mittels Residuenkalkül berechnen.

a) (2 P) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion $f(z) = \cot \pi z \equiv \dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ an ihren Polstellen.

b) (1 P) Sei U eine einfach zusammenhängende Umgebung von z_0. Seien $f : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ und $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. f habe bei z_0 einen Pol erster Ordnung. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Res}\,[gf, z_0] = g(z_0)\,\mathrm{Res}\,[f, z_0]$$

c) (2 P) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion $\dfrac{\cot \pi z}{z^2}$.

d) (3 P) Sei $M \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie den quadratischen Weg Γ_M, festgelegt durch die Folge seiner vier Eckpunkte

$$(M+\frac{1}{2})(1+\mathrm{i}) \longrightarrow -(M+\frac{1}{2})(1-\mathrm{i}) \longrightarrow -(M+\frac{1}{2})(1+\mathrm{i}) \longrightarrow (M+\frac{1}{2})(1-\mathrm{i})$$

Zeichnen Sie den Weg in die komplexe Ebene und markieren Sie die Polstellen von $\dfrac{\cot \pi z}{z^2}$.

Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\Gamma_M} \frac{\cot \pi z}{z^2}\, \mathrm{d}z = -\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^2}$$

Wir sind natürlich interessiert am Limes $M \to \infty$. Schätzen Sie das Integral auf der linken Seite für große M ab und zeigen, dass es im Grenzfall $M \to \infty$ verschwindet (vgl. Blatt 8, Aufgabe 3d).

Bestimmen Sie so den Wert von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

e) (+3 P) Was ist der Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$?