Lineare Algebra und Vektoranalysis

Sommersemester 2019
Blatt 11, Abgabe 27.06.2019 bis 10:00

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

Wir erinnern an die *Einstein'sche Summenkonvention*: Über einen Index der sowohl "oben" (kontravariant) als auch "unten" (kovariant) auftaucht, wird summiert. Bsp.: $v_i w^i \equiv \sum_i v_i w^i$.

1 Ko- und Kontravariant (12 P)

a) (4 P) Sind die folgenden Ausdrücke sinnvoll in Hinblick auf ihre Indizes? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $C_i = A^{ij} B_j$

b) $C = A_{ij} B^{ij}$

c) $C = A^i{}_i B_j^j$

d) $D_{ijkl} = A_{il}^{mn} B_{mkj} C^n$

b) (8 P) Seien A_{ij}, B^{ij}, v_i, w^i die Komponenten ko- bzw. kontravarianter Tensoren erster bzw. zweiter Stufe.

Zeigen Sie, dass

a) $v_i w^i$ wie ein Skalar

b) $A^{ij} v_j$ wie ein kontravarianter Tensor erster Stufe ("Vektor")

c) $B_{ij} w^j$ wie ein kovarianter Tensor erster Stufe

d) $A_{ij} B^{jk}$ wie ein gemischter Tensor zweiter Stufe ("lineare Abbildung")

transformiert.

2 Transformation des Trägheitstensors (8 P)

In der Vorlesung wurden die Komponenten des Trägheitstensor bzgl. einer beliebigen Basis hergeleitet

$$I^i_{\ j} = r^k r^l g_{kl} \delta^i_j - r^i r^k g_{kj}$$

wobei g_{ij} der metrische Tensor ist und δ^i_j das Kronecker-Delta.

a) (3 P) Um welchen Typ Tensor sollte es sich handeln? Welches Transformationsverhalten sollte I aufgrund der Position seiner Indizes haben?

b) (5 P) Überprüfen wir, dass das richtige Transformationsverhalten vorliegt. Falls nicht, wäre die Notation mit ko- und kontravarianten Indizes sinnlos.

Betrachten Sie dazu das Verhalten der einzelnen Teile

$$r^k r^l g_{kl}\ , \quad \delta^i_j \quad \text{und} \quad r^i r^k g_{kj}$$

unter Basiswechsel. Das Transformationsverhalten der Vektorkomponenten r^i und des metrischen Tensors sind Ihnen aus der Vorlesung bzw. der Übung bekannt. Das Kronecker-Delta δ^j_i ist die Matrixdarstellung der Identitätsabbildung bezüglich *jeder* Basis (zeigen!).

3 Die Spur (10 P) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ quadratische Matrizen gleicher Dimension. Man nennt $\operatorname{Tr} \mathbf{A} \equiv \operatorname{Sp} \mathbf{A} \equiv A^i{}_i$ die *Spur* (engl. *trace*) einer Matrix.

a) (8 P) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Spur

a) $\operatorname{Tr} \mathbf{A}$ ist unabhängig von der gewählten Basis. Bemerkung: Es ist daher sinnvoll von der Spur einer linear Abbildung zu sprechen.

b) $\operatorname{Tr}(\mathbf{ABC}) = \operatorname{Tr}(\mathbf{BCA}) = \operatorname{Tr}(\mathbf{CAB})$

c) $\operatorname{Tr} \mathbf{A} = \sum_i \lambda_i$ wobei λ_i die Eigenwerte der diagonalisierbaren Matrix $\mathbf{A}$ sind.

d) $\ln \det \mathbf{A} = \operatorname{Tr} \ln \mathbf{A}$ wobei $\mathbf{A}$ diagonalisierbar sein soll.

b) (2 P) Sei $\mathbf{A}$ eine beliebige 2×2 Matrix und $\chi_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda)$ ihr charakteristisches Polynom. Zeigen Sie, dass

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{Tr} \mathbf{A}\, \lambda + \det \mathbf{A}$$