Lineare Algebra und Vektoranalysis

Sommersemester 2019
Blatt 12, Abgabe 04.07.2019 bis 10:00

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

Dies ist das letzte Übungsblatt. Wir weisen darauf hin, dass auch die noch folgenden Vorlesungsinhalte klausurrelevant sind.
Die Klausur findet am 23.07 statt. Falls Sie nicht schon dabei sind, raten wir zeitnah mit der Wiederholung des Stoffs zu beginnen. Nutzen Sie die noch ausstehenden Tutorien und freitäglichen Fragestunden.

1 Physikalische Größen in krummlinigen Koordinaten (30 P)

Seien

1. Zylinderkoordinaten durch

$$\begin{aligned}(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\infty,\infty) &\to \mathbb{R}^3\\ (r,\phi,z) &\mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi, z)\end{aligned}$$

   und

2. Kugelkoordinaten durch

$$\begin{aligned}(0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3\\ (r,\theta,\phi) &\mapsto (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\end{aligned}$$

   gegeben.

a) (10 P) Berechnen Sie jeweils die *normierten* Vektoren der lokalen Basis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z\}$ bzw. $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ und verifizieren Sie, dass die Vektoren paarweise orthogonal sind. Überprüfen Sie außerdem, dass die Vektoren in der jeweils angegeben Reihenfolge(!) eine rechtshändige Basis bilden. Das heißt

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi$$

und analog für alle zyklischen Permutationen der drei Basisvektoren.

b) (10 P) Sei $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \vec{r}(t)$ eine differenzierbare Bahnkurve. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, sowie die kinetische Energie $\frac{1}{2}m\,\langle\vec{v},\vec{v}\rangle$ und den Drehimpuls bzgl. des Koordinatenursprungs $\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v}$ jeweils in Zylinder- und Kugelkoordinaten.

Überlegen Sie zur Berechung von $\vec{L}$ erst, wie sich der Ortsvektor als Linearkombination der jeweiligen Koordinatenbasis darstellen lässt (*Hinweis:* Man benötigt im Allgemeinen nicht alle drei Basisvektoren um $\vec{r}$ darzustellen.)

c) (10 P) Ein Satellit bewegt sich auf der (frei erfundenen) Bahn

$$(r(t), \theta(t), \phi(t)) = (r_0, \omega t, 2n\omega t)$$

um die Erde vom Nord- zum Südpol. Es sei $t \in (0, \pi/\omega)$ und $n \in \mathbb{N}$. Skizzieren Sie grob die Bahn für $n = 3$.

Auf den Satelliten wirke eine Kraft $\vec{F} = F_0 \sin\theta\vec{e}_\phi + mg\vec{e}_r$. Berechnen Sie die Arbeit $W = \int \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}$ die auf dem Weg gegen die Kraft verrichtet wird.