Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

**1 Lineare Abbildungen und Matrixdarstellung (10 P)** Untersuchen Sie ob die folgenden Abbildungen linear sind. Falls ja, geben Sie die Matrixdarstellung bzgl. der angegebenen Basen an.

Die Vektorraumstruktur auf dem $\mathbb{R}^n$ ist wie üblich durch komponentenweise Addition bzw. komponentenweise Multiplikation mit einem reellen Skalar gegeben.

Auch auf vielen Mengen von Funktionen lässt sich sinnvoll eine Vektorraumstruktur definieren. Eine Basis eines solchen Funktionenraums ist dann eine Menge von Funktionen aus denen sich alle anderen Funktionen dieses Raumes linear kombinieren lassen. Wir betrachten hier den besonders zugänglichen Raum von reellen Polynomen.

Auf dem Polynomraum ist die Addition durch

$$+ : (p, q) \mapsto (x \mapsto p(x) + q(x))$$

und die skalare Multiplikation durch

$$\cdot : (\lambda, p) \mapsto (x \mapsto \lambda p(x))$$

gegeben.

Wir definieren die Basen $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2\}$, $\mathcal{P}_n = \{x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, \ldots, x \mapsto x^n\}$. (Verkürzt schreiben wir einfach $\mathcal{P}_n = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$).

- **a)** (3 P) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (3x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$. Gesucht ist die Darstellung bzgl. der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.
- **b)** (4 P) Sei $P_n$ der Raum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich $n$ und die Abbildung durch $G : P_n \to P_n : \ (x \mapsto p(x)) \mapsto (x \mapsto x^m p'(x))$ gegeben. Es sei $m \in \mathbb{N}_0$. Gesucht ist die Darstellung bzgl. $\mathcal{P}$.
- **c)** (3 P) $T_{\vec{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \ \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}$ mit $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Gesucht ist die Darstellung bzgl. der Standardbasis.

**2 Kern und Bild (10 P)** In der Vorlesung haben Sie die Begriffe *Kern* und *Bild* einer linearen Abbildung $L : V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen kennengelernt und gezeigt, dass der Kern ein Unterraum von $V$ ist.

- **a)** (3 P) Zeigen Sie, dass $\operatorname{im} L \subset W$ ein Unterraum von $W$ ist.
- **b)** (3 P) Berechnen Sie den Kern der Abbildung $F$ aus Aufgabe 1. Welche Dimension hat das Bild von $F$? Welche Dimensionen haben Kern und Bild der Abbildung $G$ aus 1b) für $m \in \{0, 1\}$?

**c)** (4 P) Der Kern spielt eine wichtige Rolle für die allgemeine Bestimmung von Urbildern linearer Abbildungen und damit der Lösung von linearen (Differential)gleichungen.

Zur Erinnerung, die Menge $L^{-1}(w) = \{v \in V \big| Lv = w\}$ heißt *Urbild von $w$*.

Beweisen Sie: Sei $L : V \to W$ linear und $w \in W$. Dann ist das Urbild gegeben durch

$$L^{-1}(w) = u + \ker L := \{u + v \big| v \in \ker L\}$$

wobei $u \in V$ ein *beliebiger* Vektor mit $L(u) = w$ ist.

[Vielleicht erkennen Sie diesen Sachverhalt aus der Lösungstheorie linearer Differentialgleichungen aus dem letzten Semester (Stichwort: "homogene Lösung + partikuläre Lösung") wieder?]

## 3 Matrixmultiplikation (10 P)

Gegeben

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

**a)** (4 P) Berechnen Sie

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}, \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$$

sofern möglich. Zwischen Räumen welcher Dimension bilden die entsprechenden Abbildungen ab?

**b)** (3 P) Seien

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 0)$$

und

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, -(x_1 + x_2 + x_3))$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen von $T, S$, sowie $S \circ T$ bezüglich der Standardbasen und verifizieren Sie, dass

$$\mathbf{M}(S)\mathbf{M}(T) = \mathbf{M}(S \circ T)$$

gilt.

**c)** (3 P) Betrachten Sie $P_4$ aus Aufgabe 1b). Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der zweiten Ableitung $\mathbf{M}(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$.