Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Drehungen in der Ebene (10 P) Betrachten Sie im Folgenden die Ebene $\mathbb{R}^2$. Die Drehung eines Vektors um den Ursprung mit Drehwinkel φ. wird durch Anwendung der Abbildung

$$R(\varphi) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

beschrieben.

a) (2 P) Argumentieren Sie, dass $R(\varphi)$ eine lineare Abbildung ist.

b) (3 P) Fertigen Sie eine Skizze an, und finden Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{R}(\varphi)$ bzgl. der Standarbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

c) (3 P) Weisen Sie nach, dass die Menge der Drehmatrizen $\mathbf{R}(\varphi)$ unter Matrixmultiplikation eine abelsche Gruppe bilden.

Bemerkung: Man bezeichnet diese Gruppe der 2x2 Drehmatrizen als *spezielle orthogonale Gruppe*, kurz SO_2. Der Sinnhaftigkeit dieser Benennung und der Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen werden wir später nachgehen.

d) (2 P) Begeben wir uns nun in den $\mathbb{R}^3$. Hier gibt es offenbar nicht nur eine, sondern viele mögliche Drehachsen. Unter Benutzung des Resultats aus b), stellen Sie die Matrizen $\mathbf{R}_x(\varphi), \mathbf{R}_y(\varphi), \mathbf{R}_z(\varphi)$ auf, die Drehungen im die x, y, z-Achse darstellen.

2 Der Algorithmus von Gauß-Jordan (20 P) In dieser Aufgabe wollen wir einen Algorithmus erarbeiten, mit dem sich sowohl lineare Gleichungssysteme lösen, als auch Inverse von Matritzen berechnen lassen.

Widmen wir uns zuerst der Lösung linearer Gleichungssyteme. Sei $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ eine $m \times n$ Matrix und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ gleichbedeutend mit } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw. in Komponenten} \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Wir führen

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

als die sogenannte *erweiterte Koeffizientenmatrix* ein. Sie enthält alle Information über das Gleichungssystem.

Der erste (und wichtigste Schritt) des Algorithmus besteht darin, die erweiterte Koeffizientenmatrix in sogenannte *Zeilen-Stufen-Form* (ZSF) zu bringen. Eine Matrix ist in ZSF Form, wenn die Zahl der führenden Nullen in jeder Zeile von oben nach unten strikt zunimmt (s. 1).

Man überführt die erweiterte Koeffizientenmatrix durch geeignete Hintereinanderausführung der folgenden sogenannten Elementaroperationen in ZSF

i) Vertauschung von zwei Zeilen.

ii) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar ungleich null.

iii) Addition eines Vielfachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile.

Bezeichnen wir mit $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}})$ eine Koeffizientenmatrix die durch eine solche Operationen aus $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ hervorgeht.

a) (3 P) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge unter diesen Operationen abgeschlossen ist. D.h wenn $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ erfüllt, so wird auch $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ erfüllt. Argumentieren Sie, dass damit beliebige Verkettungen der Elementaroperationen gestattet sind ohne die Lösung zu ändern.

b) (3 P) Die Elementaroperationen i)–iii) werden durch Multiplikation von links mit geeigneten Matrizen realisiert

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{EA}$$

Finden Sie diese Matrizen und beweisen Sie, dass die Elementaroperationen bijektiv sind, also den Rang der Matrix $\mathbf{A}$ nicht ändern.

Die ZSF wird nun durch folgende Schritte erreicht

G1) Man sortiere zunächst die Zeilen der Matrix aufsteigend nach der Zahl der führenden Nullen. Damit erhält man schematisch eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & \cdots & & & & & b_1 \\
0 & a_{22} & \cdots & & & & \vdots \\
0 & a_{32} & \cdots & & & & \\
0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & & \\
0 & 0 & 0 & a_{54} & \cdots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & & \vdots \\
0 & & \cdots & & 0 & & b_7
\end{array}\right)$$

G2) Nun beginnt man von unten den führenden Koeffizienten jeder Reihe a_i wenn möglich zu eliminieren. Wenn die darüberliegende Reihe a_{i-1}ihren führenden Koeffizienten an der gleichen Stelle hat, zieht man (Operation iii.) ein geeignetes Vielfaches ab

$$a_i \mapsto a_i - \lambda a_{i-1}$$

Diesen Schritt iteriert man solange von unten nach oben, bis sich keine Koeffizienten mehr eliminieren lassen. Die resultierende Matrix hat schematisch die Form (Abb. 1)

c) (4 P) Können Sie anhand der ZSF ablesen, ob es eine Lösung gibt? Lässt sich ablesen ob die Lösung eindeutig ist und welche Dimension der Lösungsraum hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

Im Prinzip lässt sich aus der ZSF schon die Lösung des Gleichungssystems iterativ ablesen.

Wir erweitern das Verfahren aber noch etwas. Wichtigste Anwendung dieses sogenannten Gauß-Jordan-Verfahrens sind die Berechnung Inverser und die Bestimmung von Determinanten (später).

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & \cdots & & & & & b_1 \\
0 & a_{22} & \cdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & a_{34} & \cdots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} & & \\
0 & & \cdots & & 0 & & \vdots \\
0 & & \cdots & & 0 & & b_7
\end{array}\right)
$$

Abbildung 1: Matrix in Zeilen-Stufen-Form. Die führenden Koeffizienten jeder Reihe sind ungleich Null. Die Zahl der führenden Nullen nimmt strikt von oben nach unten zu.

GJ3) Man dividiere jede Zeile durch ihren führenden Koeffizienten und setze diesen damit auf 1.

GJ4) Man führe Elementaroperationen durch, so dass jede *Spalte* die einen führenden Koeffizienten enthält an allen anderen Positionen null ist. (Überlegen Sie sich, dass das möglich ist und wie die resultierende Matrix aussieht!)

Durch Anwendung dieser Schritte erhält man die *reduzierten ZSF* (rZSF).

d) (4 P) Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme indem Sie die Matrizen auf reduzierte Zeilen-Stufen-Form bringen.

(i)

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
3 & 1 & 21 & 13 & 15 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\
6 & 2 & 43 & 26 & 30 \\
3 & 1 & 18 & 12 & 14
\end{array}\right)
$$

(ii)

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

e) (3 P) Zeigen Sie: Eine $n \times n$ Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre rZSF die Einheitsmatrix ist.

Zeigen Sie außerdem: Die Inverse lässt sich berechnen, indem man von

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & & 1
\end{array}\right)
$$

ausgeht und beiderseits die selben Umformungen vornimmt, so dass links die Einheitsmatrix entsteht. Die rechte Seite ist dann die Inverse.

f) (3 P) Berechnen Sie die Inverse von

$$
\begin{pmatrix}
\frac{3}{2} & 13 & 3 & 0 & 3 \\
0 & 0 & \frac{9}{2} & 1 & 0 \\
0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 5 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$