Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Determinanten (22 P) In der Vorlesung haben Sie zwei explizite Techniken zur Berechnung der Determinante kennengelernt: Die Leibniz'sche Regel, sowie den Laplace'schen Entwicklungssatz.

Die Leibniz-Regel ist in der Praxis nicht besonders effektiv, da die Zahl der Terme $n!$ (die Größe der Permutationsgruppe S_n) sehr schnell wächst. Außerdem ist es schwierig den Überblick über alle Permutationen zu behalten. Sie eignet sich besonders für Beweise und wird oftmals auch als Definition der Determinante herangezogen.

Die Entwicklung nach Zeilen (oder Spalten) krankt an gleicher Stelle, da man im ersten Schritt n Unterdeterminanten berechnen muss, für jede dieser dann $n-1$ usw. Für Matrizen der Größe 3, 4 oder 5 ist dies aber noch gut machbar, insbesondere wenn eine Zeile oder Spalte viele Nullen enthält.

a) (6 P) Das Gauß-(Jordan)-Verfahren liefert eine weitere – rechnerisch weit weniger aufwendige Methode – zur Determinantenberechung. Dabei nutzt man aus, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix einfach das Produkt der Diagonaleinträge ist.

Sei also

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix, d.h. alle Einträge unterhalb der Diagonalen sind Null. Zeigen Sie, dass

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Gilt dies auch für untere Dreiecksmatrizen?

Beschreiben Sie nun eine Methode mit der man die Determinante einer beliebigen quadratischen Matrix durch Umformung auf Zeilen-Stufen-Form berechnen kann. Denken Sie dabei an die Eigenschaften der Determinante unter den elementaren Zeilenumformungen.

Zur Erinnerung: $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^t$.

b) (4 P) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mittels eines Verfahrens Ihrer Wahl

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & a & a & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & b \\ a & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

c) (3 P) Für 3×3-Matrizen gibt es eine Rechenregel zur Bestimmung der Determinante, die *Regel von Sarrus*. Dabei werden zur Hilfestellung die beiden linken Spalten der Matrix noch einmal rechts neben die Matrix geschrieben. Dann werden die Produkte der Matrixeinträge über die Diagonalen gebildet (für jede Diagonale ergibt sich also ein Produkt aus drei Matrixeinträgen).

Die Produkte aller Diagonalen werden addiert, wobei die Diagonalen in $\searrow$-Richtung das Vorzeichen "+" und die Diagonalen in $\swarrow$-Richtung das Vorzeichen "-" bekommen (siehe Abb.).

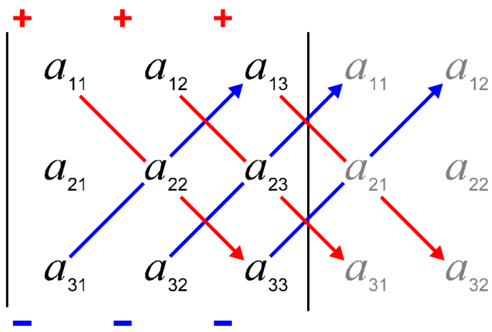

Abbildung 1: Regel von Sarrus[1]

Zeigen sie, dass die Regel von Sarrus das gleiche Ergebnis liefert wie die Anwendung der Laplace'schen Regel.

d) (2 P) Folgende Eigenschaften gelten allgemein für Determinanten von $n \times n$-Matrizen $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$:

$$\text{(i)} \quad \det(\mathbf{XY}) = \det(\mathbf{X}) \det(\mathbf{Y}) \qquad \text{(ii)} \quad \det(\mathbf{X}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{X})}$$

Begründen sie diese Beziehung durch die Volumenänderung des Einheitswürfels unter den linearen Transformationen X, Y, respektive X^{-1}.

e) (2 P) Sei $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}(n \times k), \mathbf{B} \in \mathrm{Mat}(k \times n)$ und $k < n$. Welche Aussage kann man über die Determinate $\det \mathbf{AB}$ treffen und warum?

f) (5 P) In der Vorlesung haben wurde folgender Sachverhalt präsentiert: Die Eigenwerte einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ sind durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$$

gegeben.

Rekapitulieren Sie den Beweis in einem kurzen(!) Essay.

Schlagworte: Kern, Invertierbarkeit, Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum.

2 Äquivalenz von Zeilen- und Spaltenrang (8 P)

In der Vorlesung wurde der *Rang* einer Abbildung/Matrix als die Dimension des Bildes bzw. der Zahl linear unabhängiger Spalten definiert.

Wie steht es mit der Dimension des von den Zeilen aufgespannten Raums? A priori ist nicht klar, dass diese beiden Größen gleich sind. In dieser Aufgabe wollen wir genau dies beweisen.

Unter dem *Zeilen- bzw. Spaltenrang* einer Matrix versteht man die Zahl der linear unabhängigen Zeilen bzw. Spalten.

[1] Bildnachweis: Eisenbahn%s [CC BY-SA 4.0 (`https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0`)]

a) (2 P) Sei $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ eine beliebige Matrix in (reduzierter) Zeilen-Stufen-Form. Zeigen Sie, dass Spaltenrang und Zeilenrang einer solchen Matrix gleich sind.

b) (6 P) Wir hatten schon in Aufgabe 2.2 gezeigt, dass Zeilenumformungen den Spalten(!)rang einer Matrix nicht ändern.

Es fehlt noch zu zeigen, dass auch der Zeilenrang unter Zeilenumformungen unverändert ist. Seien also $(a_1, \ldots, a_m)$ die Zeilen der betreffenden Matrix $\mathbf{A}$ und $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m)$ die aus einer Zeilenumformung hervorgegangenen Zeilen von $\tilde{\mathbf{A}}$.

Tatsächlich gilt sogar die stärkere Aussage: Der Zeilenraum ändert sich unter Zeilenumformungen nicht.

Zeigen Sie also: $x \in \mathbb{R}^m$ liegt im von den Zeilen $(a_1, \ldots, a_m)$ aufgespannten Raum, genau dann wenn es im von $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m)$ aufgespannten Raum liegt.

c) (1 P) Argumentieren Sie nun, dass für alle Matrizen Zeilenrang = Spaltenrang gilt. Wir bezeichnen diese Größe von nun an nur noch als *Rang*.

3 Matrix-Normalform (Bonus +5 P)

Mittels Umformung auf reduzierten ZSF können wir jede Matrix in ein handliches Format bringen. Dazu haben wir uns bisher nur Zeilenumformungen bedient. Allerdings können wir die Elementaroperationen genauso gut an den Spalten vornehmen. Die reduzierte Zeilen-Stufen-Form kann dadurch noch weiter vereinfacht werden, indem man "überschüssige" Spalten eliminiert. Dabei nutzt man die selben Elementarumformungen wie für die Zeilen.

In Aufgabe 2 von Blatt 2 hatten wir im Zuge des Gauß-Jordan-Verfahrens die sogenannten Elementarmatrizen eingeführt. Die Zeilenumformungen werden durch Multiplikation von links mit diesen Matrizen erzeugt.

Der Vollständigkeit halber führen wir die Elementarmatrizen in (2) auf.

$$\mathbf{S}_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Multiplikation der i-ten Zeile mit λ

$$\mathbf{Q}_i^j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \lambda & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Addition des λ-fachen der j-ten zur i-ten Zeile.

$$\mathbf{P}_i^j = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile.

Abbildung 2: Elementare Zeilenumformungen

a) (2 P) Zeigen Sie, dass elementare Spaltenumformungen durch Multiplikation von *rechts* mit den Elementarmatrizen (s. oben) erzeugt werden. Genau wie ihre Zeilen-Pendants ändern auch diese den Rang nicht.

b) (3 P) Argumentieren Sie, dass jede Matrix $\mathbf{A}$ durch eine geeignete Folge von Zeilen- und Spaltenumformungen

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{R}_j \cdots \mathbf{R}_1 \mathbf{A} \mathbf{C}_1 \cdots \mathbf{C}_k$$

in die Normalform

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,m-r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{array}\right)$$

gebracht werden kann. Hierbei ist $\mathbf{I}_r$ die $r \times r$-Einheitsmatrix. Was ist die Zahl r?

Wir wünschen schöne Ostertage!