Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Eigenwerte/-vektoren und Diagonalisierung (12 P) Bestimmen Sie die Eigenwerte und alle dazugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

a)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

b)
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

d)
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & b^* & 0 & 0 \\ a^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Interpretieren Sie das Ergebnis für die Matrizen $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ geometrisch.

Entscheiden Sie in jedem Fall, ob die Matrix diagonalisierbar ist und begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, geben Sie die Matrix des Basiswechsels an und verifizieren durch explizite Multiplikation, dass die Matrix durch den entsprechenden Basiswechsel diagonalisiert wird.

2 Matrixexponentiale (18 P) Es sei $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$, mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, die Menge aller reellen, oder komplexen, $n \times n$-Matrizen und $\mathbf{I}_n \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ bezeichne die $n \times n$-Identitätsmatrix.

Da wir wissen wie man Matrizen addiert und multipliziert – also Polynome von Matrizen bildet – könnte man auf die Idee kommen die aus dem Reellen und Komplexen bekannten Potenzreihen auf Matrizen zu übertragen und somit eine ganze Fülle von nützlichen Funktionen den Matrizen zugänglich zu machen.

Als motivierendes und gleichzeitig praktisch wichtiges Beispiel betrachten wir die Exponentialfunktion. Analog zur Exponentialfunktion für Zahlen ist das Matrixexponential für jedes $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ folgendermaßen definiert:

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k$$

a) (2 P) Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, lassen sich Systeme von linearen Differentialgleichungen in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

schreiben.

Nehmen Sie an $\mathbf{A}$ sei eine konstante Matrix (die Einträgen sollen also nicht von t abhängen). Zeigen Sie, dass durch

$$\mathbf{x}(t) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{x_0}$$

eine Lösung von (1) zum Anfangswert $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$ gegeben ist.

Hinweis: Wie aus dem Reellen gewohnt dürfen Sie die Funktion gliedweise differenzieren.

Die Lösung linearer DGL (mit konstanten Koeffizienten) reduziert sich also auf die Berechnung eines Matrixexponentials. Grund genug sich damit auseinander zu setzen!

b) (4 P) Berechnen sie die Exponentiale folgender Matrizen:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei diesen vier Beispielen liess sich das Exponential noch gut durch explizites Auswerten der Reihe ermitteln. Das ist natürlich nicht immer so (relativ) problemlos möglich. Ist die Matrix diagonalisierbar, vereinfacht sich die Berechnung allerdings erheblich.

c) (1 P) Es sei $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ eine beliebige $n \times n$-Diagonalmatrix. Zeigen sie

$$\exp(\mathbf{D}) = \operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^{d_1}, \ldots, \mathrm{e}^{d_n}\right) \tag{2}$$

d) (1 P) Es sei $\mathbf{X} \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ eine diagonalisierbare Matrix, d.h. es gibt Matrizen $\mathbf{P}, \mathbf{D}$, so dass $\mathbf{X} = \mathbf{PDP}^{-1}$, wobei $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix ist. Folgern sie aus der Diagonalisierbarkeit von $\mathbf{X}$, dass

$$\exp(\mathbf{X}) = \mathbf{P}\exp(\mathbf{D})\mathbf{P}^{-1},$$

gilt, wobei $\exp(\mathbf{D})$ durch (2) gegeben ist.

e) (4 P) Nutzen Sie die Formel aus d) um das Exponential der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{D}$ aus Aufgabe 1 zu berechnen.

f) (4 P) Ausdruck (1) taugt nur für Gleichungen erster Ordnung. Das stellt allerdings kein sonderliches Hinderniss dar, denn man kann jede Gleichung höherer Ordnung als ein System von Gleichungen erster Ordnung schreiben.

Betrachten wir zum wiederholten Male den gedämpften harmonischen Oszillator $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Führen wir die Hilfsvariable $v \equiv \dot{x}$ ein, lässt sich die DGL als

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -\gamma & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}$$

schreiben. Verifizieren Sie dies! Berechnen Sie die allgemeine Lösung zum Anfangswert (v_0, x_0) indem Sie die Ergebnisse aus a) und d) anwenden.

g) (2 P) Beim Rechnen mit Funktionen von Matrizen ist aber im Allgemeinen Vorsicht geboten. Zum Beispiel gilt für die Exponentialfunktion einer (komplexen) Zahl

$$\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^b\mathrm{e}^a.$$

Zeigen sie, dass Matrixexponentiale im Allgemeinen diese Identität *nicht* erfüllen. Haben Sie eine Ahnung woran dies liegen mag?

Hinweis: Konstruieren Sie ein möglichst einfaches Gegenbeispiel.