Lineare Algebra und Vektoranalysis
Sommersemester 2019
Blatt 5, Abgabe 09.05.2019 bis 10:00

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Transformation unter Basiswechsel (20 P) Die Objekte mit denen wir es in der linearen Algebra zu tun bekommen – also Vektoren, lineare Abbildungen – sind allesamt unabhängig von der Wahl einer Basis. Dies muss so sein, denn die Wahl einer Basis ist schliesslich vollkommen willkürlich. Damit sind auch die Komponentendarstellungen dieser Objekte (Spaltenvektoren, Matrizen,...) willkürlich. Praktisch ist einem oft daran gelegen Basen zu finden in denen z.B. eine lineare Abbildung eine möglichst einfache Darstellung (z.B. Diagonalform) hat.

Damit man das selbe Objekt in verschiedenen Basen betrachten kann, müssen wir also wissen wie sich die Komponenten all dieser Objekte unter einem Wechsel der Basen verändern. Alle Transformationseigenschaften folgen direkt aus der Invarianz der abstrakten Objekte. Der Vektor, oder die lineare Abbildung selbst hängt nicht von der Wahl der Basis ab.

Seien im Folgenden V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\mathcal{E} = \{e_i\}, \mathcal{E}' = \{e'_i\} \subset V$ bzw. $\mathcal{F} = \{f_i\}, \mathcal{F}' = \{f'_i\} \subset W$ beliebige Basen dieser Räume. Insbesondere gibt es dann S_{ij} und T_{ij} so dass

$$e_i = \sum e'_j S_{ji}$$
$$f_i = \sum f'_j T_{ji}$$

Sei weiterhin $L : V \to W$ eine lineare Abbildung.

a) (1 P) Folgern Sie aus der Invarianz eines Vektors $v \in V$, dass seine Komponenten gemäß

$$\mathbf{v}' = \mathbf{S}\mathbf{v}$$

unter Basiswechsel transformieren.

b) (1 P) Folgern Sie außerdem aus der Invarianz von $w = Lv$, dass sich unter Wechsel der Basen sowohl in V als auch W, die Matrixdarstellung von L gemäß

$$\mathbf{L}' = \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{S}^{-1}$$

transformiert.

Nun untersuchen wir ein Objekt dessen Komponenten weder wie die eines Vektors, noch einer linearen Abbildung transformieren. In der Vorlesung haben Sie den Begriff des *Skalarprodukts* kennengelernt. Wir beschränken uns hier auf den reellen Fall und betrachten euklidische Skalarprodukte.

Wie Sie wissen ist ein solches Skalarprodukt eine *bi*lineare Abbildung von $V \times V \to \mathbb{R}$. Auch diese existiert unabhängig von der Wahl einer Basis und muss unabhängig von dieser sein.

Trotzdem können wir nach Wahl einer (nicht notwendigerweise orthonormalen) Basis das Skalarprodukt aus den Komponenten der beteiligten Vektoren bestimmen, indem wir schreiben

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_i u_i e_i, \sum_j v_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j} u_i v_j \langle e_i, e_j \rangle \equiv \sum_{i,j} u_i v_j g_{ij} \tag{1}$$

Das letzte Gleichheitszeichen definiert dabei die Größe $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ die man *metrischen Tensor* nennt. Dieser enthält in einer gegebenen Basis alle Information über ein Skalarprodukt – genauso wie Abbildungsmatrizen eine lineare Abbildung vollständig festlegen.

c) (2 P) Überzeugen Sie sich, dass (1) in der Form

$$\langle u, v \rangle = \mathbf{u^t g v} \tag{2}$$

geschrieben werden kann, wobei $\mathbf{u^t} = (u_1, \ldots, u_n)$ ein Zeilenvektor ist und $(\mathbf{g})_{ij} = g_{ij}$ die aus den Komponenten des metrischen Tensors geformte Matrix.

d) (3 P) Demonstrieren Sie, dass bzgl. einer Orthonormalbasis stets

$$\langle u, v \rangle = \mathbf{u^t I v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum u_i v_i \tag{3}$$

gilt. $\mathbf{I}$ ist die Einheitsmatrix. Jedes Skalarprodukt nimmt in einer OBN also die bekannte Form des Standardskalarprodukts an.

Was passiert nun wenn wir die Basis wechseln?

Zeigen Sie dass (3) im Allgemeinen *nicht* invariant unter Basiswechseln ist (z.B. indem Sie die Basis skalieren). Welche Eigenschaft muss eine Basiswechselmatrix erfüllen, um $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ invariant zu lassen?

Um ein invariantes Objekt zu definieren, reicht es also nicht lediglich $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ zu betrachten. Wir müssen den metrischen Tensor ebenfalls transformieren. Das Transformationsverhalten ergibt sich aus der Forderung dass das Skalarprodukt unabhängig von der Basis ist.

e) (5 P) Folgern Sie aus der Invarianz von $\langle u, v \rangle$ unter Basiswechsel, dass der metrische Tensor wie

$$\mathbf{g}' = (\mathbf{S^{-1}})^{\mathbf{t}} \mathbf{g} \mathbf{S^{-1}}$$

transformiert, wenn $\mathbf{u}' = \mathbf{S u}$. Zeigen Sie dazu zuerst, dass Invertierung und Transposition vertauschen, d.h

$$(\mathbf{S^{-1}})^{\mathbf{t}} = (\mathbf{S^t})^{\mathbf{-1}}$$

gilt [*Hinweis:* Zeigen und verwenden Sie $(\mathbf{AB})^{\mathbf{t}} = \mathbf{B^t A^t}$].

f) (5 P) Beweisen Sie ferner, dass aus den bekannten Eigenschaften des Skalarprodukts folgende Eigenschaften des metrischen Tensors $\mathbf{g}$ folgen

(i.) $\mathbf{g}$ ist symmetrisch.

(ii.) $\mathbf{g}$ ist invertierbar.

(iii.) $\mathbf{g}$ ist stets diagonalisierbar und alle Eigenwerte sind strikt positiv.

und dass umgekehrt jede symmetrische Matrix mit strikt positiven Eigenwerten ein Skalarprodukt gemäß (2) definiert.

g) (3 P) Sei $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$ bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ definiert dies ein valides Skalarprodukt?

Finden Sie die Basis die bzgl. des durch $\mathbf{g}$ gegebenen Skalarprodukts orthonormal ist (für zulässige a) indem Sie im ersten Schritt $\mathbf{g}$ geignet diagonalisieren. Überlegen Sie dann wie Sie Normalität erreichen können.

2 Orthogonale Abbildungen (10 P) In der Vorlesung wurde der Begriff der *orthogonalen Abbildung* eingeführt. Eine lineare Abbildung eines euklidischen Vektorraums $L: V \to V$ auf sich selbst[1] heißt demnach *orthogonal* wenn

$$\forall x, y \in V : \langle Lx, Ly \rangle = \langle x, y \rangle$$

gilt.

Mit $O(V)$ bezeichnen wir die Menge aller orthogonalen Abbildungen auf V.

Wir wollen hier einige wichtige Eigenschaften dieser Abbildungen und ihrer Matrixdarstellungen erarbeiten.

a) (3 P) Zeigen Sie zuerst einmal, dass L sogar umkehrbar[2] ist, und dass L^{-1} ebenfalls orthogonal ist.

Beweisen Sie dann weiter, dass $O(V)$ unter Verkettung sogar eine Gruppe bildet.

Was lässt sich über die Matrixdarstellungen orthogonaler Abbildungen sagen?

b) (2 P) Zeigen Sie, dass eine Abbildungsmatrix $\mathbf{L}$ von $L \in O(V)$ bzgl. einer Orthonormalbasis die Relation

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}^t$$

erfüllt.

Wir nennen eine Matrix *orthogonal* wenn sie diese Eigenschaft besitzt.

c) (3 P) Orthogonale Matrizen können durch viele gleichwertige Aussagen definiert werden.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Es gilt $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}^t$.

(ii) Es gilt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Lx} \cdot \mathbf{Ly} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

(iii) Die Spalten $(\mathbf{l}_1, \dots \mathbf{l}_n)$ der Matrix $\mathbf{L}$ sind orthonormal: $\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{l}_j = \delta_{ij}$.

d) (2 P) Zeigen Sie, dass $\det(L) = \pm 1$. Welchen Transformationen entsprechen die verschiedenen Vorzeichen geometrisch? Betrachten Sie den Spezialfall des $\mathbb{R}^3$.

[1] genannt ein *Endomorphismus*

[2] eine umkehrbare lineare Abbildungen nennt man auch *Isomorphismus*