Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

Die *reelle Fourierreihe* einer $2T$-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($f(x+2T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$) ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right) \quad \text{mit} \\ \omega =& \frac{\pi}{T}, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} f(x)\mathrm{d}x, \\ a_n =& \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\cos(n\omega x)\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\sin(n\omega x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1}$$

1 Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten (14 P)

a) (2 P) Zeigen Sie, dass für eine beliebige integrierbare Funktion $f(x)$ mit Periode $2T$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^{2T} f(x)\mathrm{d}x = \int_c^{c+2T} f(x)\mathrm{d}x$$

Schliessen Sie daraus, dass man zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_n, b_n ein beliebiges Interval der Länge T heranziehen darf.

Hinweis: Zerlegen Sie das Integrationsinterval und nutzen die Periodizität des Integranden.

Damit kann man die Berechnung in vielen Fällen deutlich vereinfachen, indem man den Intergrationsbereich geschickt wählt.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2T$-periodische Funktion. Diese Funktion ist *gerade*, falls

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

und *ungerade*, falls

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) (2 P) Zeigen sie, dass $f(x) = \cos(\alpha x)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ eine gerade Funktion ist.
Hinweis: benutzen sie Euler's Formeln.

c) (2 P) Zeigen sie, dass $g(x) = \sin(\beta x)$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion ist.

d) (4 P) Beweisen sie folgende Integralgleichungen für beliebige ungerade Funktionen $f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, respektive gerade Funktionen $f_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\int_{-a}^{a} f_u(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall a \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{-b}^{b} f_g(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^b f_g(x)\mathrm{d}x \quad \forall b \geq 0.$$

e) (4 P) Beweisen sie folgende Aussagen:

a) Für die relle Fourierreihe (1) einer ungeraden, $2T$-periodischen Funktion f_u gilt $a_0 = 0$ und $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

b) Für die reelle Fourierreihe (1) einer geraden, $2T$-periodischen Funktion f_g gilt $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_+$.

2 Reelle Fourierreihen von periodischen Funktionen (16 P)

a) (2 P) Skizzieren sie *Sägezahnfunktion*: $f(x) = -2x$ auf dem Intervall $]-2, 2]$ und dann periodisch fortgesetzt.

b) (10 P) Bestimmen sie die reelle Fourierreihe der Sägezahnfunktion aus a).

Hinweis: Auf `www.wolframalpha.com` können sie ihr Ergebnis "plotten". Zum Beispiel: der Befehl

```
plot 4/Pi*(sum 1/(2*n+1)*sin((2*n+1) x) from n=0 to 9),
```

in das Eingabefenster eingegeben, veranschaulicht das Ergebnis der (beim 9ten Term abgebrochenen) Fourierreihe für die Rechteckfunktion.

c) (4 P) Berechnen sie die reelle Fourierreihe von $f(x) = \sin^2(6x)$ für $T = \pi$.

Hinweis: Die Aufgabe lässt sich lösen ohne ein einziges Integral zu berechnen.

3 Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Fourierreihe (10 P)

Analog zur reellen Fourierreihe (1) definiert man die *komplexe Fourierreihe* von reellen, $2T$-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{in\omega x} \quad \text{mit } \omega = \frac{\pi}{T} \text{ und } c_n = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} f(x) \mathrm{e}^{-in\omega x} \mathrm{d}x \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

a) (7 P)Beweisen sie, dass folgender Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Fourierkoeffizienten stets gilt:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \ \forall n < 0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \ \forall n > 0.$$

b) (3 P) Bestimmen sie die komplexe Fourierreihe der Sägezahnfunktion aus Aufgabe 2.a).