Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

Wir verwenden von nun an die Notation

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

für beliebige Funktionen f, g falls das Integral existiert.

1 Die Delta-"Funktion" (7 P) In der Vorlesung wurde die Dirac'sche Delta-Funktion als Grenzwert einer Folge von Gauß'schen Glockenfunktionen deren Breite immer schmaler wird eingeführt und ihre sogenannte "Siebeigenschaft"

$$\langle \delta, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

nachgewiesen.
Sei im Folgenden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine hinreichend differenzierbare und im Unendlichen verschwindende Funktion.

a) (1+1+2+1 P) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Delta-Funktion durch geeignete Substitutionen und partielle Integrationen

i.) Wir schreiben $\delta_a(x) \equiv \delta(x-a)$. Dann gilt die Translationseigenschaft

$$\langle \delta_a, f\rangle = f(a)$$

ii.) Skalierung

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

iii.) Sei g eine differenzierbare Funktion mit isolierten, einfachen Nullstellen $\{x_i\}$. Dann gilt

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$

Bestimmen Sie damit ($x_0 \neq 0$)

$$\int f(x)\delta(x^2 - x_0^2)\mathrm{d}x$$

Hinweis: Approximieren Sie g durch eine Taylorreihe in der Nähe jeder Nullstelle von g bis in erster Ordnung.

iv.) Ableitungen der Delta-Funktion ($f^{(n)} \equiv \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}^n}$)

$$\left\langle \delta^{(n)}, f \right\rangle = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

b) (2 P) Durch

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

wird die *Heaviside'sche Stufenfunktion* definiert.

Zeigen Sie, dass die Ableitung der Stufenfunktion die Delta-Funktion ist, dass also $\langle \Theta', f\rangle = \langle \delta, f\rangle = f(0)$ gilt.

2 Die Green'sche Funktion (10 P) Die Fourier-Transformation spielt eine herausragende Rolle in der Lösungstheorie inhomogener, linearer Differentialgleichungen. Ist nämlich – wie in der Vorlesung gezeigt – G eine sogenannte *Fundamentallösung* der Differentialgleichung

$$\mathcal{L}f = g$$

d.h.

$$\mathcal{L}G(x, x') = \delta(x - x')$$

so lässt sich eine spezielle Lösung zur Inhomogenität g durch Faltung bestimmen

$$f(x) = (G * g)(x) = \int G(x, x')g(x')\mathrm{d}x$$

G bezeichnet man als *Green'sche Funktion.*
Und da die Fourier-Transformation Ableitungen in Multiplikation überführt, vereinfacht sich die Bestimmung der Green'schen Funktion auf ein algebraisches Problem mit anschliessender Rücktransformation. Wir rechnen ein Beispiel.

a) (2 P) Natürlich betrachten wir wieder den gedämpften harmonischen Oszillator. Es sei also

$$\mathcal{L}G(t, t') = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) G(t, t') = \delta(t - t') \tag{1}$$

und wir sind interessiert am Verhalten des Oszillators unter dem Einfluss einer beliebigen Antriebskraft[1] $g(t)$.

Überführen Sie die (1) mittels Fourier-Transformation in eine algebraische Gleichung und bestimmen Sie die Green'sche Funktion $G(t, t')$ bis auf Ausführung des Integrals zur Rücktransformation. Wir werden dieses Integral später mit den Methoden der komplexen Analysis bestimmen.

b) (4 P) Als Ergebnis der Rücktransformation erhält man für die Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators

$$G(t, t') = e^{-\gamma(t-t')}\frac{\sin(\omega(t - t'))}{\omega}\Theta(t - t') \tag{2}$$

wobei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ die natürliche Frequenz des Oszillators ist und Θ die in Aufgabe 1 eingeführte Heaviside-Funktion.

Deuten Sie diesen Ausdruck physikalisch. Entspricht er Ihrer Vorstellung über die Green'sche Funktion als "Impuls-Antwort" des Systems? Welche Bedeutung hat die auftretende Stufenfunktion hinsichtlich Kausalität?

c) (4 P) Weisen Sie nach, dass es sich bei (2) tatsächlich um die Green'sche Funktion des Problems handelt. Das heisst, zeigen Sie dass für eine beliebige Testfunktion[2] ϕ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}G(t, t')\phi(t)\mathrm{d}t = \int \delta(t - t')\phi(t)\mathrm{d}t = \phi(t')$$

Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften aus Aufgabe 1.

[1] Bisher haben wir immer eine sinusförmige Kraft betrachtet. Der Formalismus der Green'schen Funktion ermöglicht es nun endlich beliebige Situationen zu beschreiben.

[2] Als Testfunktionen bezeichnet man besonders gutartige Funktionen. Insbesondere sollen sie beliebigig oft differenzierbar sein. Ausserdem fallen sowohl die Funktion als auch alle ihre Ableitungen im Unendlichen schneller als jedes Polynom ab. Die Gauß-Funktion ist ein gutes Beispiel.

3 Wärmeleitung in einer Dimension (13 P) Gegeben sei ein Stab aus Metal, den wir aus praktischen Gründen als unendlich lang betrachten wollen. Wir beschreiben die Temperatur am Ort x zur Zeit t mittels einer Funktion $T(x,t)$. Wärme fliesst immer dort wo ein Temperaturgradient herrscht. Wenn man annimmt, dass die spezifische Wärme des Metals eine Konstante ist, gehorcht das Temperaturprofil T der Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{3}$$

Hierbei ist D die Temperaturleitfähigkeit des Materials. Ziel ist es diese Gleichung mittels Fourier-Transformation zu lösen. Zur Zeit $t = 0$ sei das Temperaturprofil durch eine beliebige Funktion $T(x,0)$ gegeben.

a) (2 P) Fourier-transformieren Sie (3) in der Ortsvariablen x und lösen Sie die entstehende Differentialgleichung in t. Nennen wir die entsprechende Fourier-Variable k. Anfangsbedingung soll eine Funktion $c(k)$ sein. Folgern Sie, dass gilt

$$c(k) = \tilde{T}(k,0)$$

Die Funktion $c(k)$ ist also die Fourier-Transformierte der Anfangsbedingung $T(x,0)$.

b) (3 P) Schreiben Sie die Lösung $T(x,t)$ als Rücktransformierte. Drücken Sie $\tilde{T}(k,0)$ durch $T(x,0)$ aus.

$$\textit{Zwischenergebnis}: \quad T(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-Dk^2t-ik(x-x')}T(x',0)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x'$$

c) (5 P) Führen Sie das Integral über k aus und ermitteln den durch

$$T(x,t) = \int H(x-x';t)T(x',0)\mathrm{d}x'$$

definierten sogenannten Wärmeleitungskern (*engl. heat kernel*) H.

d) (3 P) Skizzieren Sie zu verschiedenen Zeiten qualitativ das Schicksal eines anfänglich bei $x = 0$ lokalisierten Temperaturpeaks $T(x,0) = \alpha\delta(x)$. Sie dürfen $D = 1$ setzen. Welche Einheit hat α?