Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

Aufgrund von Christi-Himmelfahrt haben Sie bis Freitag, 31.05 Zeit zur Bearbeitung.
Die Übungsstunden am 30.05 entfallen. Wir versuchen stattdessen eine gemeinsame Stunde für Mittwoch den 29.05 zu organiseren. Beachten Sie bitte die Ankündigung auf der Webseite.

1 Fourier-Tranformation (6 P) Bisher haben wir die Fourier-Transformation als Hilfmittel zur Lösung von Differentialgleichungen eingesetzt ohne eine solche Transformation explizit zu berechnen. Das holen wir nun nach.
Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden Funktionen ($L > 0$)

a) (3 P)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & -L < x < L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) (3 P)

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-|x|/L}$$

2 Komplexe Differenzierbarkeit (9 P)

a) (5 P) Entscheiden Sie an welchen Punkten die folgenden Funktion komplex differenzierbar sind.

$$\begin{aligned} f_1(z) =& z^4, \\ f_2(z) =& \mathrm{e}^z, \\ f_3(z) =& |z|^2, \\ f_4(z) =& \sin(z), \\ f_5(z) =& z^*. \end{aligned}$$

Wo sind sie holomorph?

Statt der üblichen Koordinaten x, y entlang der Basisvektoren $\{1, \mathrm{i}\}$, dürfen wir in der komplexen Ebene auch andere Koordinatensysteme betrachten.
Eine interessante und nützliche Wahl sind die Koordinaten

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad \bar{z} = x - \mathrm{i}y$$

b) (2 P) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

und

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

Die Differentialoperatoren $\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f$ werden auch *Wirtinger Ableitungen* genannt. Besonders Zweiterer hat eine schöne Anwendung.

c) (2 P) Zeigen Sie, dass f genau dann die Cauchy-Riemann-Bedingung erfüllt (also komplex diff'bar ist) wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Damit hat man eine elegante Möglichkeit die Differenzierbarkeit einer Funktion zu prüfen, ohne Sie erst in Real- und Imaginärteil zerlegen zu müssen.

3 Komplexe Wegintegrale (9 P) Wir betrachten folgende Wege

$$\begin{aligned} \gamma_1 :&[0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = (1+i)t \\ \gamma_2 :&[0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = t + it^2 \end{aligned}$$

a) (2 P) Skizzieren sie γ_1 und berechnen sie $\int_{\gamma_1} z^2 \mathrm{d}z$.

b) (2 P) Skizzieren sie γ_2 und berechnen sie $\int_{\gamma_2} z^2 \mathrm{d}z$. Was fällt ihnen auf?

c) (2 P) Unter der *Länge* einer stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ versteht man die Zahl

$$L(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\gamma}(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Bestimmen sie $L(\gamma_1)$ und $L(\gamma_2)$.

d) (3 P) Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $|f(z)| \leq C \ \forall z \in \Omega$ (Beschränktheit). Zudem sei $\gamma : [t_0, t_1] \to \Omega$ eine stetig differenzierbare Kurve. Beweisen sie folgende Abschätzung für Wegintegrale:

$$\left| \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z \right| \leq C L(\gamma).$$

4 Konsequenzen der Cauchy'schen Integralformel (6 P) Aus der Vorlesung:

Theorem 1 (Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben) *Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, welche die Kreisscheibe $\{z : |z - z_0| \leq r\}$ enthält. Dann gilt für jedes $a \in \mathbb{C}$ im Inneren dieser Kreisscheibe*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z.$$

a) (3 P) Bestimmen sie folgendes Wegintegral mithilfe der Cauchy'schen Integralformel:

$$\int_{|z-1|=4} \frac{\mathrm{e}^{3z}}{z - \pi i} \mathrm{d}z.$$

b) (3 P) Bestimmen sie

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos\left(r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{d}t$$

für $r = 1$ und $r = 10$. Spielt der tatsächliche Wert von r eine Rolle?