Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Mehr zur Differenzierbarkeit (6 P) Überprüfen Sie, dass die folgenden Funktionen u harmonisch sind ($\Delta u = 0$) und finden Sie jeweils eine weitere harmonische Funktion v, so dass $u + \mathrm{i}v$ analytisch ist.

a) $u_1(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

b) $u_2(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

2 Ein reelles Integral (4 P) Berechnen Sie folgendes reelles Integral indem Sie es als Kurvenintegral über einen geeigneten Weg umschreiben.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos t}\, \mathrm{d}t$$

3 Satz von Liouville (10 P) Eine auf $\mathbb{C}$ überall holomorphe Funktion nennt man *ganz*. Insbesondere lassen sich ganze Funktionen um jeden Punkt in eine Taylorreihe mit unendlichem Konvergenzradius entwickeln.
Eine Funktion f heißt *beschränkt* falls es ein $0 \leq M < \infty$ gibt, so dass für alle z aus ihrem Definitionsgebiet $|f(z)| \leq M$ gilt.

a) (4 P) Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe mit Radius ρ und Mittelpunkt a mit Rand K. Sei ferner f holomorph auf $D \cup K$. Zeigen Sie, dass folgende Abschätzung gilt:

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n! \max_{z \in K}\{|f(z)|\}}{\rho^n}$$

b) (2 P) Beweisen Sie damit den

Satz von Liouville: *Eine beschränkte, ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.*

c) (1 P) Wieso stellt die Funktion $f = \sin$ keinen Widerspruch zum Satz von Liouville dar?

d) (3 P) Beweisen Sie mithilfe des Satzes von Liouville den

Fundamentalsatz der Algebra: *Jedes nicht-konstante Polynom p mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und betrachten die Funktion $1/p$.

Folgern Sie daraus die Aussage, dass ein Polynom n-ten Grades genau n komplexe Nullstellen hat.

4 Zusammenhang von Taylor- und Fourier-Reihen (10 P) Gegeben sei eine auf U holomorphe Funktion f. U enthalte den Ursprung. Wir können f in eine Potenzreihe entwickeln: $f(z) = \sum_n a_n z^n$.
Setzen wir innerhalb des Konvergenzradius $z = re^{\mathrm{i}\phi}$.

a) (1 P) Zeigen Sie, dass

$$f(z) = \sum_n r^n \left(b_n \cos n\phi - c_n \sin n\phi\right) + \mathrm{i} \sum_n r^n \left(c_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi\right)$$

ist, wobei $b_n, c_n \in \mathbb{R}$.

Das bedeutet, wenn wir die Funktion $f = u+\mathrm{i}v$ in Real- und Imaginärteil zerlegen, liefert uns die komplexe Reihenentwicklung sowohl Taylor-Reihen in r, als auch Fourier-Reihen in ϕ.

b) (3 P) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der reellen Funktion

$$v(\phi) = \frac{2\sin\phi}{5 - 4\cos\phi}$$

c) (3 P) Zeigen Sie dass für $m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} v(\phi)\sin(m\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2^m}$$

d) (3 P) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der reellen Funktion

$$\tilde{v}(r) = \frac{r}{\sqrt{2}(1 + r^2) - 2r}$$

um $r = 0$.

Hinweis zu b)-d): Betrachten Sie die Reihenentwicklung von $(1 - z)^{-1}$.