Lineare Algebra und Vektoranalysis
Sommersemester 2019
Blatt 7, Abgabe 23.05.2019 bis 10:00

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

Wir verwenden von nun an die Notation

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

für beliebige Funktionen f, g falls das Integral existiert.

1 Wärmeleitung in einer Dimension (13 P) Gegeben sei ein Stab aus Metal, den wir aus praktischen Gründen als unendlich lang betrachten wollen. Wir beschreiben die Temperatur am Ort x zur Zeit t mittels einer Funktion $T(x,t)$. Wärme fliesst immer dort wo ein Temperaturgradient herrscht. Wenn man annimmt, dass die spezifische Wärme des Metals eine Konstante ist, gehorcht das Temperaturprofil T der Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

Hierbei ist D die Temperaturleitfähigkeit des Materials. Ziel ist es diese Gleichung mittels Fourier-Transformation zu lösen. Zur Zeit $t = 0$ sei das Temperaturprofil durch eine beliebige Funktion $T(x, 0)$ gegeben.

a) (2 P) Fourier-transformieren Sie (1) in der Ortsvariablen x und lösen Sie die entstehende Differentialgleichung in t. Nennen wir die entsprechende Fourier-Variable k. Anfangsbedingung soll eine Funktion $c(k)$ sein. Folgern Sie, dass gilt

$$c(k) = \tilde{T}(k, 0)$$

Die Funktion $c(k)$ ist also die Fourier-Transformierte der Anfangsbedingung $T(x, 0)$.

b) (3 P) Schreiben Sie die Lösung $T(x,t)$ als Rücktransformierte. Drücken Sie $\tilde{T}(k, 0)$ durch $T(x, 0)$ aus.

$$\textit{Zwischenergebnis}: \quad T(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-Dk^2t-ik(x-x')}T(x',0)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x'$$

c) (5 P) Führen Sie das Integral über k aus und ermitteln den durch

$$T(x,t) = \int H(x-x';t)T(x',0)\mathrm{d}x'$$

definierten sogenannten Wärmeleitungskern (*engl. heat kernel*) H.

d) (3 P) Skizzieren Sie zu verschiedenen Zeiten qualitativ das Schicksal eines anfänglich bei $x = 0$ lokalisierten Temperaturpeaks $T(x, 0) = \alpha\delta(x)$. Sie dürfen $D = 1$ setzen. Welche Einheit hat α?

Lösung

Ich hatte entgegen der Konvention der Vorlesung das Vorzeichen im Exponenten bei der Fourier-Transformation als positiv angenommen. Daher ergibt sich im Gauss-Integral ein unbedeutendes Vorzeichen im Exponenten.

a) Eine Fourier-Trafo in x führt dank $\widetilde{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}(k) = -\mathrm{i}k\tilde{f}(k)$ auf die DGL

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{T}}{\mathrm{d}t} = -Dk^2\tilde{T}$$

Für jedes k wird diese Familie von Gleichungen durch die Exponentialfunktion gelöst

$$\tilde{T}(k,t) = c(k)e^{-Dk^2t} \tag{2}$$

Setzt man $t = 0$, folgt das Ergebnis $c(k) = \tilde{T}(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\mathrm{i}kx'} T(x',0)\,\mathrm{d}x'$

b) Fourier-Rücktransformieren von (2) ergibt das Integral

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{T}(k,0)e^{\mathrm{i}kx}e^{-Dk^2t}\,\mathrm{d}k$$

Nun setze man den Ausdruck für $\tilde{T}(k,0)$ von oben ein.

c) Das Integral über k erkennen wir als ein Gauss-Integral. Diese hatten wir auf Blatt 7 der Mathematischen Methoden im letzten Semester ausgerechnet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}+bx}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{2a}}$$

[Falls Sie dieses Resultat noch nie selber hergeleitet haben, sollten Sie das nachholen! Indem man den Exponenten im Integral quadratisch ergänzt und danach substituiert, reduziert sich das Integral auf das Standard-Gauss-Integral $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Letzteres leitet man her, indem man das Integral quadriert und Polarkoordinaten einführt.]

Damit ausgerüstet ergibt sich nach Ausführung des Integrals über k und Vergleich mit dem gesuchten Ausdruck

$$H(x-x';t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4Dt}\right)$$

d) Der anfängliche Delta-Peak bei $x = 0$ verwandelt sich in eine Gauss-Funktion der zunehmenden Breite $\sim \sqrt{t}$. Betrachtet man z.B die Halbwertsbreite der Funktion, so bewegt diese sich mit der Geschwindigkeit $\sim \sqrt{t}^{-1}$ von x' fort. Das Temperaturprofil verändert sich also immer langsamer, je weiter es sich ausdehnt.

Man beachte außerdem, dass der Wärmeleitungskern automatisch normiert ist $\int H(x-x';t)\,\mathrm{d}x = 1$. Dadurch ist das Intgral über T zeitlich konstant. Das ist sinnvoll, denn dem System wird weder Wärme entzogen noch zugeführt.

Die Einheit der Delta-Funktion ist invers zur Einheit des Integrals. $\delta(x)\mathrm{d}x$ muss einheitenlos sein.

In diesem Fall hat sie die Einheit einer inversen Länge. Daher ist $[T] = [\alpha]/\mathrm{L}$ und somit $[\alpha] = \mathrm{T}\cdot\mathrm{L}$

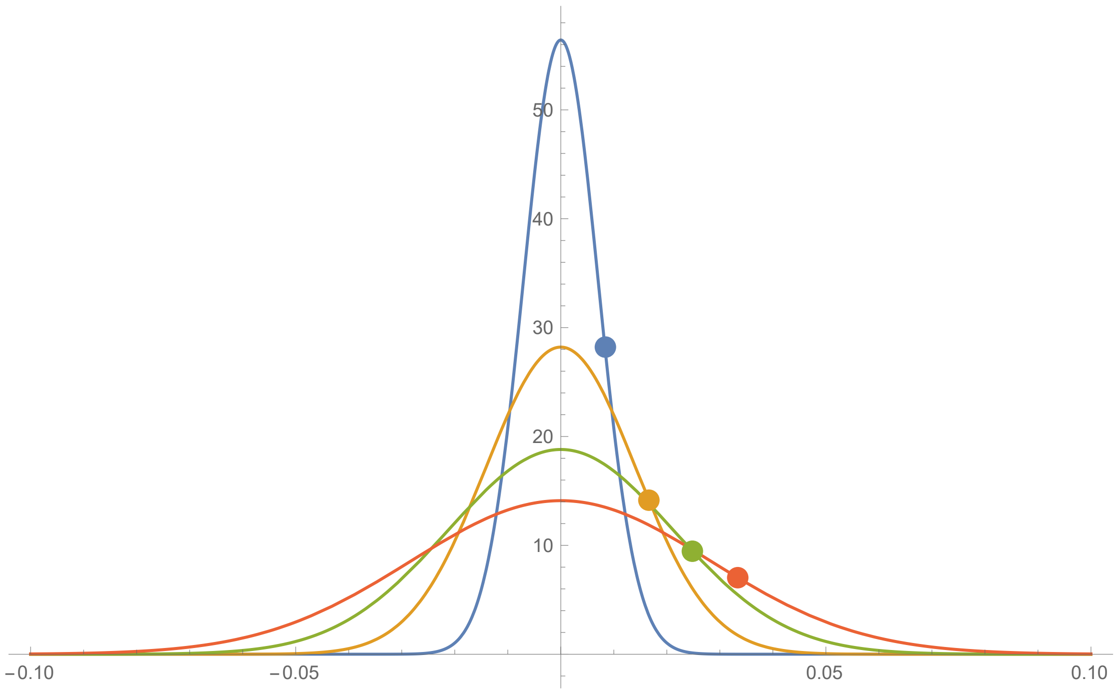

Abbildung 1: Ausbreitung des Temperaturprofils. Die Zeit wächst von einer Funktion zur nächsten quadratisch, d.h. die Punkte die die Halbwertsbreite markieren, haben gleichen Abstand auf der x-Achse zueinander.