Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Aussagenlogik Mathematik arbeitet deduktiv. Eine Aussage wird als wahr bewiesen, indem man diese aus bereits als wahr bekannten Aussagen logisch folgert. Dies kann auf verschiedene Weisen geschehen. Wir wollen hier einige Beweistechniken einführen.

Die *Negation* einer Aussage notieren wir mit $\neg A$. Die Verknüpfung zweier Aussagen durch "und" (*Konjunktion*) bzw. "oder" (*Disjunktion*) als $A \wedge B$ bzw. $A \vee B$.

Wenn aus der Wahrheit einer Aussage A die Wahrheit einer zweiten Aussage B folgt, so notieren wir dies mit

$$A \Rightarrow B \tag{1}$$

Wir nennen B eine *notwendige Bedingung* für A bzw. A eine *hinreichende Bedingung* für B.
Ist A sowohl notwendig als auch hinreichend für B, so nennen wir beide Aussagen *äquivalent*

$$A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B \wedge A \Leftarrow B)$$

a) Kennen Sie notwendige oder hinreichende Bedingungen bereits aus der Schulmathematik? (Stichwort: Kurvendiskussion) Machen sie sich klar, was in diesem Fall die Aussagen A, B sind und wie der Folgerungspfeil zu laufen hat.

b) Diskutieren Sie die Aussage:

$$\text{Sei } x \in \mathbb{R}. \text{ Dann gilt: } x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3.$$

c) Wir nehmen an (1) sei wahr. Können wir eine Aussage über $\neg A$ und $\neg B$ treffen? Dies führt auf den *Beweis durch Kontraposition.*

d) Beweisen Sie durch Kontraposition

Seien $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Falls n nicht ab teilt, teilt n weder a noch b.

Kompakter:

$$\forall a, b, n \in \mathbb{Z} : n \nmid ab \Rightarrow (n \nmid a \wedge n \nmid b)$$

Überlegen Sie dazu zuerst wie Konjunktionen $A \wedge B$ negiert werden.

e) Wie könnte ein *Beweis durch Widerspruch* funktionieren?

Nutzen Sie nun Ihre Erkenntnisse um folgende Aussagen formal zu beweisen. Machen Sie sich klar was die gegebenen Vorraussetzungen sind, wie die Behauptung lautet, und formulieren Sie schließlich den Beweis.

f) Die Summe zweier beliebiger gerader Zahlen ist durch zwei teilbar.

g) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv.

h) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

i) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $x, y \in G$. Zeigen Sie dass $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ ist.

2 Beweis durch Induktion Oft möchte man eine Aussage für alle natürlichen Zahlen beweisen, z.B

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

Die Beweistechnik der vollständigen Induktion beruht auf dem folgenden *Axiom(!)* der natürlichen Zahlen:

Sei $K \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in K$. Falls $\forall k \in K : k+1 \in K$, dann ist $K = \mathbb{N}$.

Bringen Sie dieses Axiom mit Ihrer eigenen Vorstellung der natürlichen Zahlen in Einklang.

Darauf aufbauend lassen sich Aussagen wie (2) nach folgendem Schema beweisen:

1. *Induktionsanfang*:
   Zeige, dass die Aussage für einen Startwert n_0 (z.B. $n_0 = 1$) gilt.
2. *Induktionsschritt*:
   Zeige, dass falls die Aussage für n gilt, sie auch für $n+1$ gilt.
3. *Induktionsschluss*:
   Dann ist die Aussage für alle $n \geq n_0$ wahr.

Beweisen Sie damit (2)!