Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Gedämpfte, gekoppelte Oszillatoren mit Antrieb (10 P) Wir erweitern das Model der durch Federn gekoppelten Oszillatoren aus der Vorlesung um einen Reibungsterm. Desweiteren wollen wir untersuchen wie sich das System verhält, wenn eine der Massen durch eine harmonische Kraft angetrieben wird.
Gegeben sei also das System

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 + \kappa(x_1 - x_2) + \gamma\dot{x}_1 = F_0\cos(\Omega t)$$
$$m\ddot{x}_2 + kx_2 + \kappa(x_2 - x_1) + \gamma\dot{x}_2 = 0$$

a) (2 P) Entkoppeln Sie das System durch geeignete Superpositionen.

Betrachten wir das System zuerst ohne treibende Kraft $F_0 = 0$.

b) (2 P) Bestimmen Sie die Frequenzen $\omega_{1,2}$ der Normalmoden.

c) (2 P) Wir stellen die Dämpfung nun so ein, dass

$$4\hat{\omega}_1^2 < \frac{\gamma^2}{m^2} \equiv b^2 < 4\hat{\omega}_2^2$$

und betrachten die anfängliche Konfiguration

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = \Delta x, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0.$$

Hierbei bezeichnen $\hat{\omega}_{1,2}$ die Frequenzen des *ungedämpften Systems.*

Beschreiben Sie das zeitliche Verhalten der Normalmoden. Wie verhalten sich die Massen in Hinblick auf ihre relative Phase und Amplitude für lange Zeiten?

Schalten wir nun die externe Antriebskraft ein.

d) (2 P) Nach einer Zeit des Einschwingens werden Amplituden und Frequenzen der Normalmoden allein vom externen Antrieb bestimmt. Wie lauten diese? Welche Resonanzfrequenzen hat das System?

e) (2 P) Welche Phasendifferenz herrscht zwischen den Oszillatoren an den beiden Resonanzen?

2 Wellengleichung in einer Dimension (10 P) Wellengleichungen gehören zu den wichtigsten partiellen Differentialgleichungen in der Physik. In dieser Aufgabe sollen Sie die Wellengleichung aus einem einfachen Model herleiten und ihre allgemeine Lösung bestimmen.

a) (4 P) Wir betrachten eine endliche, lineare Kette (siehe Skizze) als Model für ein eindimensionales Medium, in dem sich die Welle ausbreitet: Die Kette besteht aus N Massepunkten der Masse m, die über ideale Federn mit Federkonstante k verbunden sind. In Ruhelage haben die Massen den Abstand h. Wir betrachten nur longitudinale Auslenkungen, d.h. Abweichungen von der Ruhelage *entlang* der Kette. Die *Auslenkung* der i-ten Masse aus ihrer Ruhelage zum Zeitpunkt t beschreiben wir durch die Variable $\varphi_i(t)$.

Nach dem Hookschen Gesetz ist die Rückstellkraft einer Feder proportional zu ihrer Ausdehnung oder Stauchung Δx und wirkt dieser entgegen:

$$F_{\mathrm{H}} = -k\Delta x.$$

Leiten Sie aus den Newtonschen Gesetzen die Bewegungsgleichung für die Auslenkung der i-ten Masse her:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\varphi_i}{\mathrm{d}t^2}(t) = k\left[\varphi_{i+1}(t) - 2\varphi_i(t) + \varphi_{i-1}(t)\right].$$

Klassifizieren Sie diese Differentialgleichungen.

b) (4 P) Zur Beschreibung eines kontinuierlichen Systems (z.B. eines elastischen Gummibands) betrachten wir nun den Grenzfall $N \to \infty$, wobei die Gesamtlänge $L = Nh$, die Gesamtmasse $M = Nm$, sowie $K = k/N$ konstant bleiben sollen. Die longitudinale Auslenkung zur Zeit t eines Punktes mit Ruhelage x wird dann beschrieben durch $\varphi(x, t)$. Für den diskreten Fall heißt das $\varphi_i(t) = \varphi(x = ih, t)$.

Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung im kontinuierlichen Grenzfall die Form

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x, t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x, t)$$

hat. Bestimmen Sie die Konstante c^2 aus den Parametern des diskreten Modells L, M und K.

Hinweis Zeigen Sie, dass sich die zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$ durch folgenden Grenzwert ausdrücken lassen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

c) (2 P) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung von Funktionen gelöst wird, für die gilt

$$f(x, t) = f(x \pm ct)$$

Welche physikalische Rolle spielt daher die Konstante c?