Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

Hinweis Dieses Übungsblatt dient der Wiederholung des bisher behandelten Stoffs. Dieser ist schon recht umfangreich und wird im neuen Jahr noch durch einen Block zur Vektoranalysis ergänzt. Nach den Ferien ist nicht viel Zeit bis zur Klausur am 7.2. daher empfehlen wir dringend, dass Sie sich während der freien Tage schonmal gründlich mit dem Stoff auseinander setzen.

Wir wünschen Ihnen (trotzdem) schöne, erholsame Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

1 Wiederholung (0 P) Gehen Sie den gesamten behandelten Stoff aus Ihren Aufzeichnungen, dem Skript und den Übungen durch. Rechnen Sie Übungsaufgaben die Sie beim ersten Mal nicht gut verstanden oder ausgelassen haben.

2 Kurzfragen (10 P) Beantworten und begründen Sie in *wenigen* Zeilen:

a) Was versteht man unter einer Basis eines Vektorraums?

b) Erklären Sie kurz den Unterschied zwischen Raumpunkten, Ortsvektoren und Komponentendarstellungen.

c) Wie kann man mithilfe des Skalarprodukts einen Vektor in seine Komponenten bzgl. einer Orthonormalbasis zerlegen?

d) Wie lässt sich das Volumen eines von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Spats berechnen?

e) Bilden die natürlichen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition eine Gruppe?

f) Zeigen Sie, dass zur Taylorreihe einer geraden Funktion $f(x) = f(-x)$ um $x_0 = 0$ nur gerade Potenzen beitragen.

g) Berechnen Sie $\sqrt{10}$ näherungsweise indem Sie die Wurzelfunktion bis zur zweiten Ordnung entwickeln. Überlegen Sie um welchen Punkt Sie zweckmäßigerweise entwickeln!

h) Leiten Sie die Kettenregel aus der Definition der Ableitung über den Differenzenquotienten her.

i) Zeigen Sie mithilfe der Euler-Formel dass $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ für reelles x.

j) Was versteht man unter einem Vektorfeld bzw. einem Skalarfeld? Geben Sie jeweils ein physikalisches Beispiel.

3 Integration (5 P) Lösen Sie die folgenden Integrale

a)

$$\int_{-1}^{1} \frac{3x}{x^2 - 4} \mathrm{d}x$$

b)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + a}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad a > 0$$

c)

$$\int x^3 \cos(x^4) \mathrm{d}x$$

d)

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}$$

e)

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3x + y - 2z) \left[\sin(x) + \ln(xy)\right] \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

4 Differentialgleichungen (12 P)

a) (2 P) Was versteht man unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung? Was unter einer Lösung einer Differentialgleichung? Was ist ein Anfangswertproblem und unter welcher Voraussetzung ist es eindeutig lösbar?

b) (1 P) Sei $\mathcal{L}$ ein linearer Differentialoperator. Zeigen Sie, dass die Lösungen der homogenen Gleichung $\mathcal{L}y = 0$ einen Vektorraum bilden.

c) (2 P) Sei

$$y(t) = Ae^{\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\mathrm{i}\omega t}$$

die allgemeine Lösung des harmonischen Oszillators. Bestimmen Sie die komplexen Koeffizienten A, B aus den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_0$. Schreiben Sie das Ergebnis einmal als Kombination von Sinus und Kosinus, und einmal in der Form $a \sin(\omega t + \phi)$ mit von Ihnen zu bestimmender Amplitude a und Phase ϕ.

d) (1+1+1+2+2 P) Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen.

Stichworte: Ordnung, (nicht-)linear, gewöhnlich, partiell, (in-)homogen. Lösen Sie die mit $(*)$ markierten Gleichungen.

i.) $y' = \sin(t) \quad (*)$

ii.) $y'' + y' + y = 0 \quad (*)$

iii.) $\frac{\partial y}{\partial t} - D\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = A \exp(-x^2/x_0^2)$

iv.) $N' = -N^2 \quad (*)$

v.) $N' = -N^2 + \gamma$, $N(0) = N_1 \quad (*)$