

1 Kurven und Kurvenlängen (6 P) Finden Sie für die folgenden Kurven im $\mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ nach $(2,0)$ geeignete Parametrisierungen:

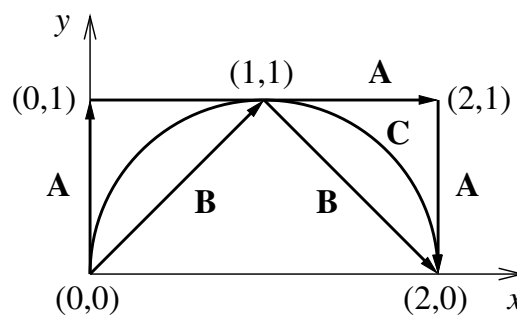
A: $(0,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (2,1) \rightarrow (2,0)$ auf drei geraden Teilkurven

B: $(0,0) \rightarrow (1,1) \rightarrow (2,0)$ auf zwei geraden Teilkurven

C: $(0,0) \rightarrow (2,0)$ auf einem Halbkreisbogen

Berechnen Sie anschließend die Bogenlängen der drei Kurven über das Linienintegral

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} dr.$$



2 Linienintegrale: Arbeit entlang eines Weges (7 P) Ein Massepunkt der Masse m bewegt sich in der Nähe der Erdoberfläche unter Einfluss der Gewichtskraft $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_y$ entlang der Parabelbahn

$$\vec{r}(t) = t\vec{e}_x + \left(-\frac{1}{2}t^2 + t\right)\vec{e}_y$$

mit $t \in [0, 2]$.

a) (2 P) Skizzieren Sie die Bahnkurve $\mathcal{D} = \{\vec{r}(t) | t \in [0, 2]\}$ sowie das Kraftfeld F_G .

b) (3 P) Berechnen Sie die für diese Bewegung aufzubringende Arbeit

$$W = - \int_{\mathcal{D}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

c) (2 P) Aufgrund eines Gegenwindes in x -Richtung wirkt *zusätzlich* die Kraft

$$\vec{F}_W = -c\vec{e}_x$$

Welche Arbeit muss nun aufgebracht werden?

3 Oberflächenintegrale (7 P) Eine homogene Flüssigkeit der Dichte ρ fliesse mit uniformer Geschwindigkeit v . Wir legen die z -Achse als Richtung der Strömung fest. Die Massenstromdichte lautet demnach

$$\vec{j} = \rho v \vec{e}_z$$

Berechnen Sie die gesamte Masse die pro Zeiteinheit durch

- a) (3 P) die Oberfläche der Halbkugel

$$H = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \mid x, y \in \mathbb{R}, z \geq 0\},$$

- b) (2 P) die Oberfläche der Vollkugel

$$V = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

- c) (2 P) sowie den Paraboloiden

$$P = \{z = -(x^2 + y^2) \mid -1 \leq x, y \leq 1\}$$

fließt, indem Sie die Oberflächen geeignet parametrisieren.