Mathematische Methoden

Wintersemester 2018/19
Blatt 12, Abgabe 24.01.2019 bis 13:30

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Der Torus (10 P) In Abbildung (1) ist ein Torus gezeigt. Dieser entsteht durch Rotation eines Kreises längs eines anderen Kreises (der dicken Linie in der Abbildung.) Betrachtet man das gesamte von der Oberfläche eingeschlossene Volumen, spricht man von einem *Volltorus*.

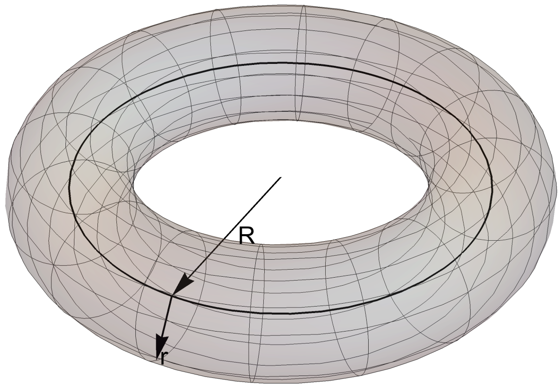

Abbildung 1: Ein Torus mit Radien R und r.

a) (4 P) Parametrisieren Sie den Volltorus mit festen Radien R und r durch eine Radial- und zwei Winkelkoordinaten. Lassen Sie sich dabei von der Abbildung inspirieren.

b) (6 P) Stellen Sie das Oberflächen- und Volumenelement in Ihrer Parametrisierung auf und berechnen Sie Oberfläche, bzw. Volumen des Torus.

2 Trägheitsmomente (5 P) Das Massenträgheitsmoment J eines Körpers K lässt sich bei bekannter Massendichte $\rho(\vec{r})$ aus folgendem Volumenintegral berechnen

$$J = \int_K \mathrm{d}V \, r_\perp^2 \, \rho(\vec{r}).$$

Hierbei bezeichnet $r_\perp$ den Abstand des Punktes *zur Rotationsachse*.

a) Eine homogene Kugel K mit Masse m und Radius r rotiert um eine ihrer Symmetrieachsen. Legen wir das Koordinatensystem so, dass dessen z-Achse mit der Drehachse zusammenfällt.

Zeigen Sie, dass für das Trägheitsmoment gilt

$$J_z = \frac{3m}{4\pi r^3} \int_K \mathrm{d}V \, (x^2 + y^2).$$

Berechnen Sie J_z.

3 Gradient (5 P)

a) (3 P) An welchen Punkten ist der Gradient von $\phi(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ senkrecht zur x-Achse? Deuten Sie dies geometrisch.

Wo ist der Gradient gleich 0? Welche Bedeutung hat es wenn der Gradient null wird?

b) (2 P) Berechnen Sie $\nabla f(r)$ für $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und eine einmal stetig differenzierbare Funktion f.